Università degli Studi di Cagliari

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in matematica

Il Teorema di Napoleone

Relatore
Prof. Lucio Cadeddu

Tesi di Laurea di
Gusi Maria Pia

Anno Accademico 2013/2014

Indice

“The advancement and perfection of

mathematics are intimately connected

to the prosperity of the state”

Napoleone Bonaparte.

Introduzione

Il teorema di Napoleone è una proprietà che presenta in un certo senso una forma di “aspirazione alla regolarità” da parte dei triangoli. Infatti a partire da un triangolo qualunque, non occorrono strane ipotesi o costruzioni artificiose per arrivare a un triangolo equilatero in pochi passaggi.

Il teorema di Napoleone non è molto noto ma è uno dei più riscoperti, e nonostante la sua semplicità, si presta a varie generalizzazioni utili per risolvere problemi pratici collegati con la vita reale.

I problemi di massimo e minimo derivano non solo dalla scienza ma anche dalla vita reale. Molti di questi problemi sono di natura geometrica e portano alla richiesta di trovare il più breve sistema di cammini che connette un insieme di punti del piano. Tali problematiche si incontrano in tanti casi quali:

- tracciare la disposizione delle porte logiche di un circuito per diminuire il tempo di propagazione
- tracciare la strada per unire dei gasdotti o più semplicemente paesi
- instradamento di condotte idriche o di riscaldamento.

In situazioni particolari il problema è facilmente risolvibile sfruttando i risultati del teorema di Napoleone e sue generalizzazioni.

La tesi è strutturata come segue:

- nel primo capitolo si considerano dei cenni storici
- nel secondo capitolo si esamina il teorema di Napoleone
- nel terzo capitolo si esamina il punto di Fermat
- nel quarto capitolo si esaminano alcune applicazioni.

Capitolo 1

NAPOLEONE MATEMATICO?

Tutti, matematici e non, conoscono Napoleone Bonaparte come un genio militare e Imperatore di Francia ma è stato anche un eccezionale studente di matematica. Nelle sue biografie [4] si legge:

"*…per i suoi insegnanti Napoleone era un allievo modello e promettente specialmente in matematica… L'ispettore scolastico scrisse che la sua attitudine alla matematica lo rendeva adatto alla marina, ma alla fine si decise che avrebbe dovuto tentare l'ingresso in artiglieria, dove l'avanzamento per merito e abilità era più aperto".*

Napoleone fu il primo fra i capi di stato a capire l'importanza della scienza e della matematica di cui ne seguì gli sviluppi per tutta la vita. E' provato che durante il suo esilio finale passasse il tempo leggendo trattati quali "*Astronomie*" di Delambre, il *corso di chimica* di Fourcroy, il *corso di matematica* di Lacroix e altri.

Nacque in Corsica (Ajaccio, 15 agosto 1769) e morì in esilio nell'isola di Sant'Elena (5 maggio 1821) dopo la sconfitta di Waterloo. Frequentò la Scuola Militare di Brienne in Francia dove fu il miglior studente di matematica. Qui studiò algebra e trigonometria, ma la sua preferita era la geometria. Dopo essersi laureato a Brienne, egli fu esaminato da Pierre Simon Laplace per un suo possibile ingresso all'accademia militare di Parigi, dove fu ammesso in virtù delle sue abilità matematiche. Napoleone completò gli studi e successivamente divenne membro della sezione di matematica dell' *Institute de France*, per il quale trovò una sede degna nel 1805, diventato Imperatore, nell'antico College des Quatre-Nations, di fianco al Palazzo del Louvre.

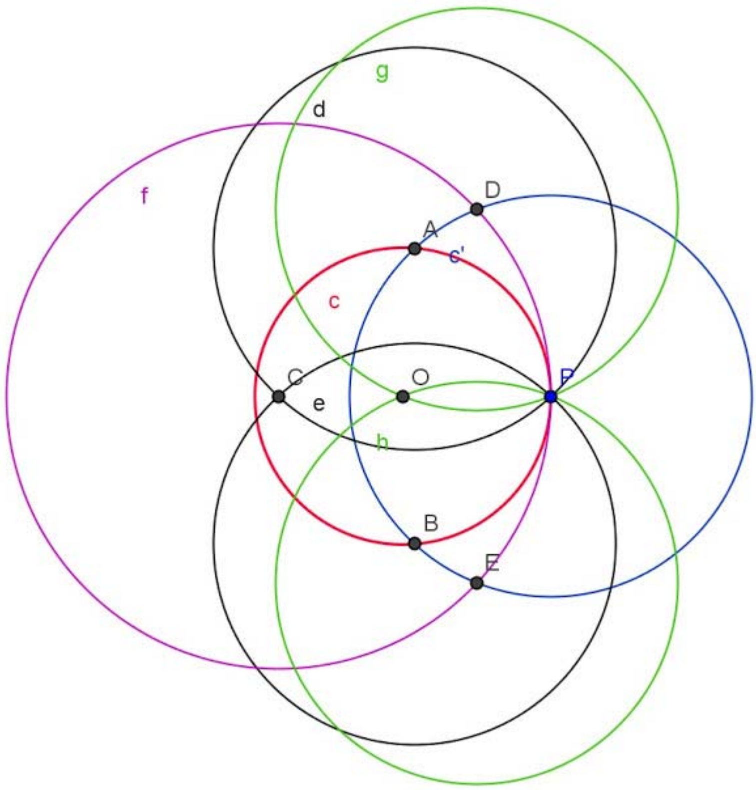
Durante la campagna d'Egitto del 1798-1799 prima ancora di diventare imperatore, Napoleone fu affiancato da un gruppo di esperti in vari settori: ingegneri civili, chimici, geologi e matematici, tra cui Gaspard Monge (1746-1818) e Joseph Fourier (1768-1830).

Al suo ritorno dall'Egitto Napoleone condusse un riuscito colpo di stato e divenne capo della Francia. Come Imperatore, varò diverse riforme giuridiche, economiche e culturali dando peso predominante alle scienze tanto da inserire uomini come Laplace, Monge e Fourier a presiedere le commissioni per formare le nuove istituzioni. Fourier divenne governatore del Basso Egitto e Laplace Ministro dell'Interno. Sotto il suo regno la Francia divenne la potenza scientifica più importante in Europa.

Egli continuò gli studi di matematica e radunò intorno a sé un gruppo di matematici di cui divenne anche amico, incluso Lorenzo Mascheroni (1750-1800), Pierre Simon Laplace (1749-1827) e Joseph Louis Lagrange (1736-1836), per dissertare di matematica.

Il nome di Napoleone è legato a vari risultati matematici ma non ne è mai stata provata la sua paternità.

Quello che è passato alla storia come "**il problema di Napoleone**" in cui si chiede di "*determinare con il solo compasso il centro (che si suppone non noto) di un cerchio dato*", si presume essere opera di Mascheroni e che sia stato suggerito a Napoleone da Monge. In seguito Napoleone fece sfoggio di queste conoscenze geometriche con Laplace (nominato comandante del genio militare) che commentò: "…*tutto ci aspettavamo da voi generale, tranne una lezione di geometria!*".



Quello che è noto come "**teorema di Napoleone**" sembra sia stato pubblicato per la prima volta in un articolo di W. Rutherford (1825) sulla rivista londinese "The Ladies' Diary", edita annualmente dal 1704 al 1841. E' probabile che il teorema fosse già noto prima di Rutherford, ma non c'è alcuna prova che lo attribuisca a Napoleone.

R.Betti in "Il miracolo di Morley e altre irregolarità dei triangoli" [6] fa riferimento al teorema di Napoleone come "*teorema proposto per la dimostrazione da Napoleone a Laplace*".

Capitolo 2

TEOREMA DI NAPOLEONE

Premettiamo a ciò che segue un breve riassunto dei punti notevoli di un triangolo:

- **ortocentro:** punto di incontro delle altezze,
- **incentro:** punto di incontro delle bisettrici**,**
- **baricentro:** punto di incontro delle mediane,
- **circoncentro:** punto di incontro degli assi
- **excentro:** punti di incontri delle bisettrici di due angoli esterni e della bisettrice dell'angolo interno non adiacente ad essi**.**

In un triangolo equilatero: ortocentro, incentro, baricentro e circoncentro coincidono e si chiama **centro.**

Parleremo di baricentri, in proposito ricordiamo che tale punto è sempre interno ed è un punto di equilibrio della figura.

Teorema 2.1. Dato un triangolo qualunque ABC, i centri dei triangoli equilateri esterni costruiti sui tre lati formano un triangolo equilatero.

Diamo di seguito due dimostrazioni alternative, una trigonometrica e una analitica.

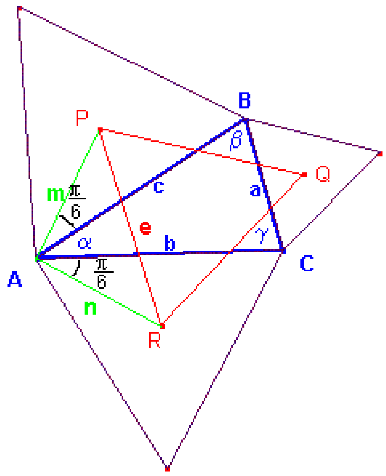


Fig.1

<u>Dimostrazione trigonometrica</u>.

Con riferimento alla figura 1, si ha

$$m = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

$$n = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

Applicando il teorema del coseno ai triangoli APR e ABC si ha rispettivamente

$$e^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Da cui, sostituendo

$$e^2 = \frac{1}{3}\left(b^2 + c^2 - bc\cos\alpha + \sqrt{3}bc\sin\alpha\right)$$

$$bc\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

Da cui, posto $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ area del triangolo ABC, si perviene a

$$e^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{3}S$$

Questa identità mostra che, dato il triangolo ABC, la misura del lato PR dipende solo dalle misure dei lati *a*, *b*, *c* e non dipende dall'angolo. Analogamente per i lati RQ e QP che quindi hanno misura identica *e*. Quindi il triangolo PQR è equilatero. Q.E.D.

<u>Dimostrazione analitica</u>.

Scegliamo opportunamente un sistema di rifermento cartesiano *Oxy:* consideriamo AB sull'asse *x* e $A \equiv O$, siano

$$AB = c, \quad AC = b, \quad CB = a$$

$$\angle A = \alpha\ , \angle B = \beta\ , \angle C = \gamma$$

$F, D, E\ i\ centri\ dei\ triangoli\ equilateri$

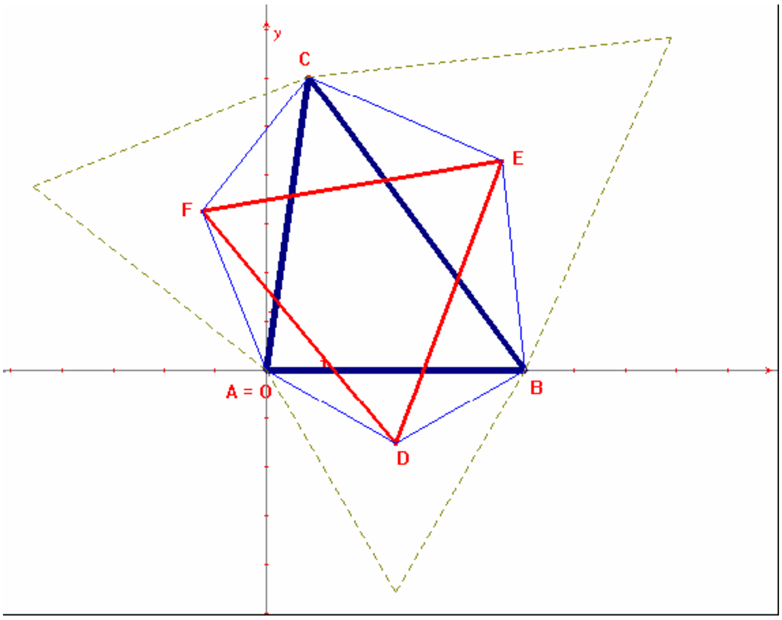


Fig. 2

Allora, poiché in un triangolo equilatero il centro è anche incentro (punto di incontro delle bisettrici), si ha

$$AF = FC = \frac{b}{2}\frac{1}{sin60^0} = \frac{b}{\sqrt{3}} \quad , \quad AD = \frac{c}{\sqrt{3}} \quad , \quad CE = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Per il teorema di Carnot si ha:

$$FD^2 = AF^2 + AD^2 - 2AF\,AD\cos(\alpha + 60^0)$$

da cui, sostituendo

$$FD^2 = \frac{b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha + 60^0)}{3}$$

$$FE^2 = \frac{b^2 + a^2 - 2ab\cos(\alpha + 60^0)}{3}$$

$$ED^2 = \frac{a^2 + c^2 - 2ac\cos(\alpha + 60^0)}{3}$$

Vogliamo dimostrare che il triangolo è equilatero, ovvero

$FD = FE = ED$ ovvero $3FD^2 = 3FE^2 = 3ED^2$.

Per comodità poniamo $x = 3FD^2$, $y = 3FE^2$, $z = 3ED^2$ e dimostriamo $x = y$.

$x = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha + 60^0) =$

$= b^2 + c^2 - 2bc\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$

$= b^2 + c^2 - bc(\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha)$

$y = b^2 + a^2 - 2ab\cos(\gamma + 60^0)$

$= b^2 + a^2 - ab\big(\cos\gamma - \sqrt{3}\sin\gamma\big)$

$z = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta + 60^0)$

$= a^2 + c^2 - 2ac\big(\cos\beta - \sqrt{3}\sin\beta\big)$.

Per il teorema delle proiezioni si ha $a = b\cos\gamma + \mathrm{c}\sin\beta$, seguono

$y = b^2 + (b\cos\gamma + c\sin\beta)^2 - b(b\cos\gamma + c\sin\beta)\big(\cos\gamma - \sqrt{3}\sin\gamma\big)$=

$= b^2 + c^2\cos^2\beta + bc\cos\gamma\cos\beta + \sqrt{3}\,b\cos\gamma\sin\gamma +$
$\sqrt{3}bc\cos\beta\sin\gamma$

Analogamente:

$$z = c^2 + b^2\cos^2\gamma + bc\cos\gamma\cos\beta + \sqrt{3}\,bc\cos\gamma\sin\beta +$$
$$+\sqrt{3}c^2\cos\beta\sin\beta$$

Essendo $x = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha + \sqrt{3}\,bc\sin\alpha$

$$\alpha = 180 - (\beta + \gamma)$$

Ricaviamo x in funzione di $\beta\ e\ \gamma$

$$x = b^2 + c^2 + bc\cos\beta\cos\gamma - bc\sin\beta\sin\gamma + \sqrt{3}bc\sin\beta\cos\gamma$$
$$+ \sqrt{3}bc\cos\beta\sin\gamma$$

Confrontiamo x e y e chiamiamo con x' (risp. y') la parte di x (risp. y) non comune a y (risp. a x):

$$x' = c^2 - bc\sin\gamma\sin\beta + \sqrt{3}bc\cos\gamma\sin\beta$$

$$y' = c^2\cos{}^2\beta + \sqrt{3}b\cos\gamma\sin\gamma$$

se $x' = y'$ sarà $x = y$.

Dato il cerchio circoscritto al triangolo ABC di raggio R si hanno:

$$a = 2R\sin\alpha$$

$$b = 2R\sin\beta$$

$$c = 2R\sin\gamma$$

Allora, sostituendo

$$x' = c^2 - bc\left(\frac{c}{2R}\right)\left(\frac{b}{2R}\right) + \sqrt{3}bc\cos\gamma\left(\frac{b}{2R}\right)$$

$$= c^2 - \frac{b^2c^2}{4R^2} + \frac{\sqrt{3}}{2R}b^2c\cos\gamma$$

$$y' = c^2 - c^2\frac{b^2}{4R^2} + \sqrt{3}b^2\cos\gamma\frac{c}{2R}$$

Dunque $x' = y'$.

Procedendo come sopra confrontiamo x e z, introdotti x' e z', si ha

$$x = z$$

Quindi $x = y \quad e \;\; x = z \quad \Rightarrow y = z$. Q.E.D

Un teorema strettamente legato al precedente è:

<u>Teorema 2.2</u>. Nelle stesse ipotesi del teorema di Napoleone, i baricentri G e G' del triangolo di partenza ABC e del triangolo equilatero EDF coincidono.

<u>Dimostrazione</u>.

Scegliamo il sistema di riferimento cartesiano Oxy come prima e manteniamo la stessa notazione.

Allora si possono determinare le coordinate:

A $(0,0)$, B $(c,0)$, C $(b\cos\alpha, b\sin\alpha)$

F$\left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\cos(\alpha+30), \frac{b\sqrt{3}}{3}\sin(\alpha+30)\right)$, D$\left(\frac{c}{2}, -\frac{c\sqrt{3}}{6}\right)$

G$\left(\frac{c+b\cos\alpha}{3}, \frac{b\sin\alpha}{3}\right)$

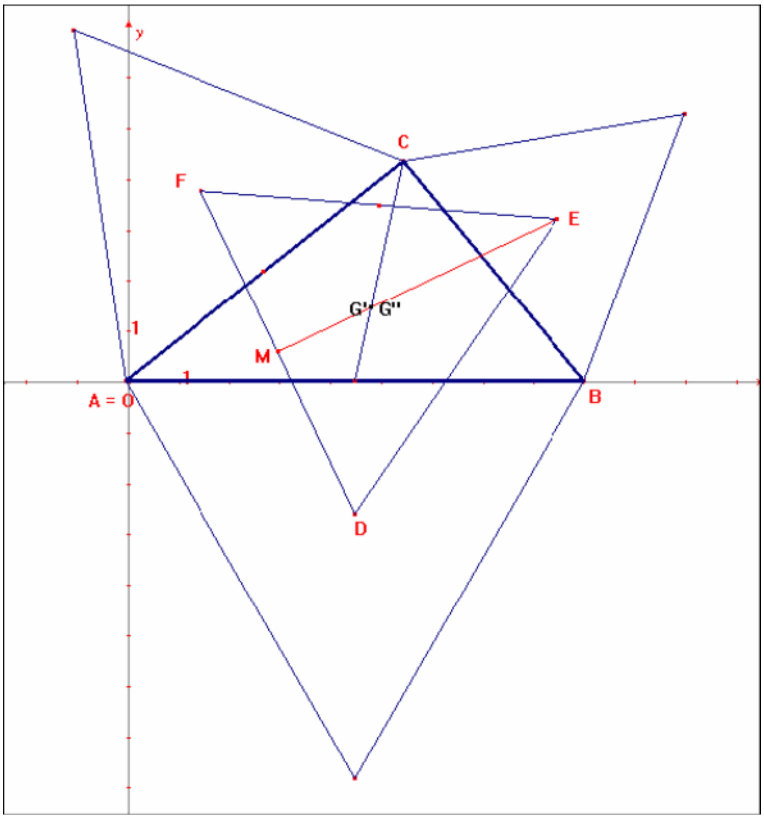


Fig. 3

Dimostriamo che G, baricentro del triangolo ABC, coincide con G, baricentro del triangolo equilatero FDE.

Procediamo nel seguente ordine:

- Determiniamo la retta FD, ovvero il suo coefficiente angolare
- Determiniamo le coordinate del punto medio M
- Determiniamo la retta EM, ⊥ alla FD per M
- Verifichiamo che G soddisfa tale equazione

Le coordinate del centro F sono:

$$x_F = \frac{b\sqrt{3}}{3}\cos(\alpha + 30) = \frac{b\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha\right)$$

$$y_F = \frac{b\sqrt{3}}{3}\sin(\alpha + 30) = \frac{b\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha\right)$$

Quindi il coefficiente della retta FD è:

$$m = \frac{b\left(\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha\right) + c}{b\left(\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha\right) - \sqrt{3}c}$$

Le coordinate del punto medio M sono:

$x_M = \frac{b\sqrt{3}(\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha) + 3c}{12}$

$y_M = \frac{b\sqrt{3}(\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha) - c\sqrt{3}}{12}$

Essendo:

$m_{\perp} = -\frac{1}{m}$

la retta EM è:

$$y\left(3b\sin\alpha + \sqrt{3}b\cos\alpha + \sqrt{3}c\right) =$$

$$= x\left(3c - 3b\cos\alpha + \sqrt{3}\,\mathrm{b}\sin\alpha\right) + b^2 - c^2$$

Sostituendo le coordinate di G si verifica che appartiene alla retta.

Q.E.D

DEFINIZIONE 2.1

Dicesi **triangolo di Napoleone esterno** il triangolo formato dai centri dei triangoli equilateri costruiti esternamente sui lati di un triangolo .

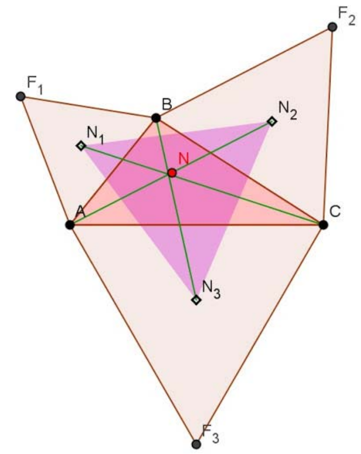


Fig. 4

DEFINIZIONE 2.2

Dicesi **triangolo di Napoleone interno** il triangolo formato dai centri dei triangoli equilateri costruiti internamente ai lati di un triangolo qualunque

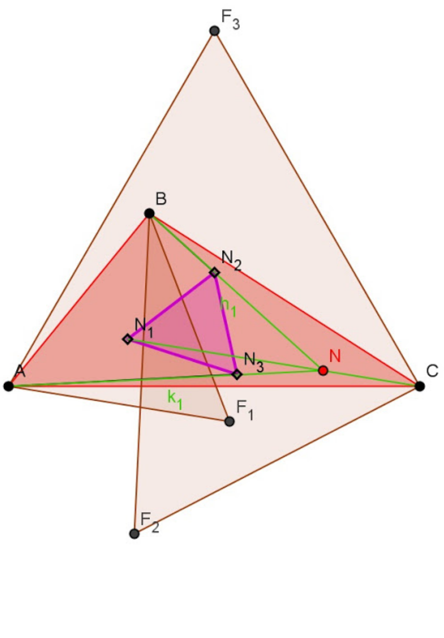
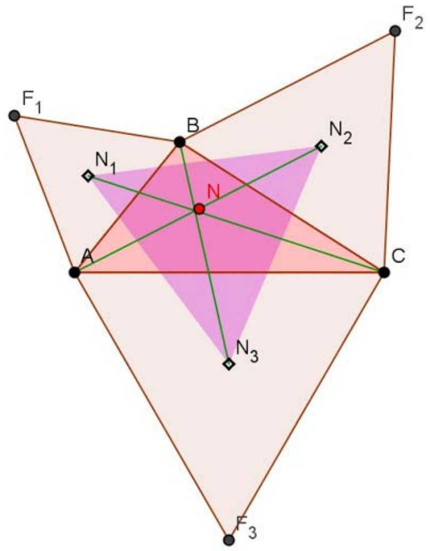
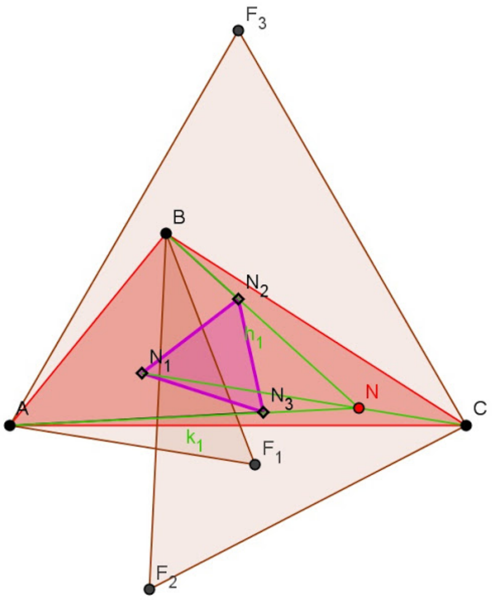


Fig. 5

DEFINIZIONE 2.3

Dicesi **punto di Napoleone** il punto che si ottiene congiungendo ciascun vertice di un triangolo qualsiasi con il vertice opposto del corrispondente triangolo di Napoleone (esterno o interno).





GENERALIZZAZIONI del teorema di Napoleone

<u>Cosa accade se i triangoli equilateri sono costruiti internamente a un triangolo qualunque?</u>

Con tecniche analoghe a quelle applicate nella dimostrazione del teorema 2.1 si può dimostrare il seguente

Teorema 2.3. Il triangolo di Napoleone interno è equilatero.

Vedi Fig. 5

<u>Cosa accade se i triangoli eretti sui lati del triangolo qualunque non sono equilateri?</u>

Teorema 2.4. Se tre triangoli simili sono costruiti sui lati di un triangolo qualunque ABC, allora le loro circonferenze circoscritte hanno un punto in comune.

Teorema 2.5. Il triangolo formato dai centri delle circonferenze circoscritte ai tre triangoli simili eretti sui lati di un triangolo qualunque ABC è simile a questi tre triangoli .

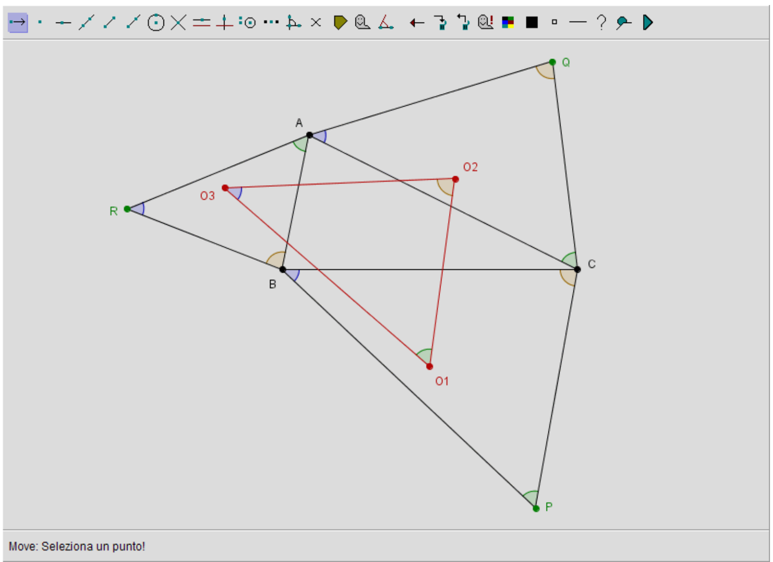
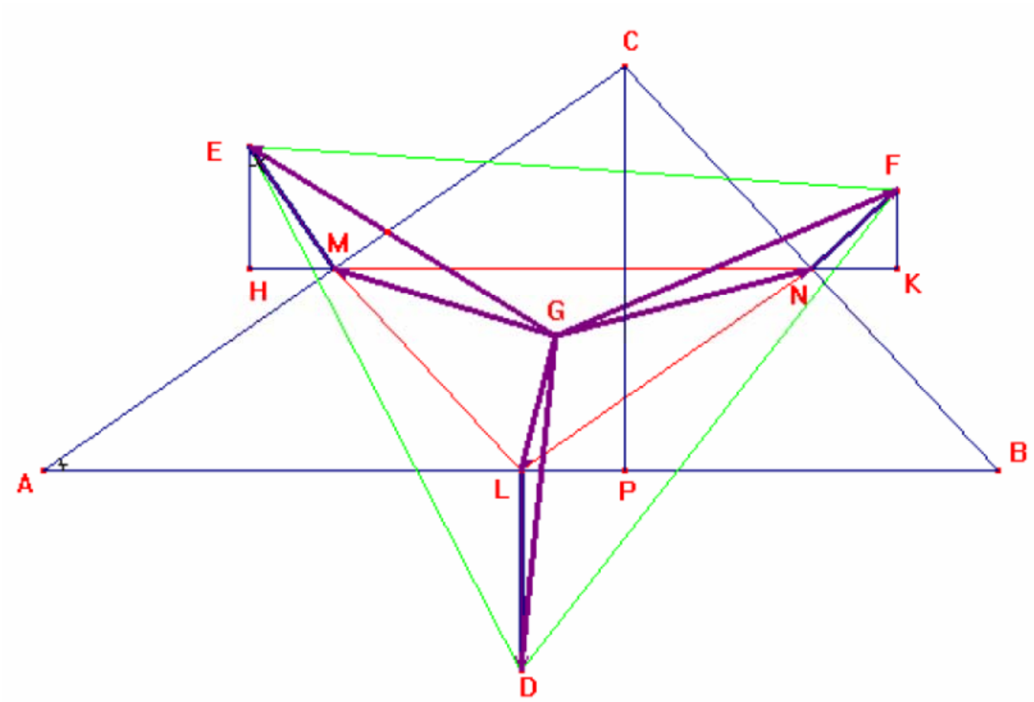


Fig. 6

Teorema 2.6. Dato un triangolo qualunque ABC, se si prendono (esternamente o internamente) sugli assi dei lati segmenti direttamente proporzionali ai lati corrispondenti, a partire dal punto medio di ogni lato, il triangolo che ha per vertici i rispettivi altri estremi di questi segmenti ha lo stesso baricentro del triangolo dato.



Dunque il triangolo LMN formato dai punti medi ha lo stesso baricentro del triangolo di partenza ABC.

Si omettono le dimostrazioni di questi risultati.

Il baricentro ha la proprietà che **minimizza la somma dei quadrati delle distanze dai vertici del triangolo ABC** ed è questa proprietà che lo rende così interessante in questo contesto. Infatti:

Teorema 2.7. Il baricentro di *n* punti complanari è il punto che minimizza la somma dei quadrati delle sue distanze dai punti stessi.

Dimostrazione. Consideriamo n punti $P_i,\ i = 1,2,\dots,n,$ sia $P(x,y)$ il punto generico e $z = f(x,y)$ *la funzione somma dei quadrati delle distanze di P da* P_i

$$z = \sum_i (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$$

con derivate prime

$$z_x = 2\sum_i (x - x_i)$$

$$z_y = 2\sum_i (y - y_i)$$

che si annullano per

$$x = \frac{1}{n}\sum_i x_i\,; \quad y = \frac{1}{n}\sum_i y_i$$

che sono le coordinate del baricentro degli n punti dati.
Essendo

$$z_{xx} = z_{yy} = 2n > 0$$

$$z_{xy} = z_{yx} = 0$$

segue

$$H = \begin{vmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{vmatrix} = 4n^2 > 0$$

Quindi il punto P è un punto di minimo. Q.E.D

Capitolo 3

PUNTO DI FERMAT

Il problema di Fermat è nato da una sfida proposta da P. Fermat (1601-1665) a E. Torricelli (1608-1647) e consiste in quanto segue:

“Dato un triangolo qualunque ABC trovare un punto interno al triangolo tale che la somma delle distanze di questo punto dai vertici sia minima”.

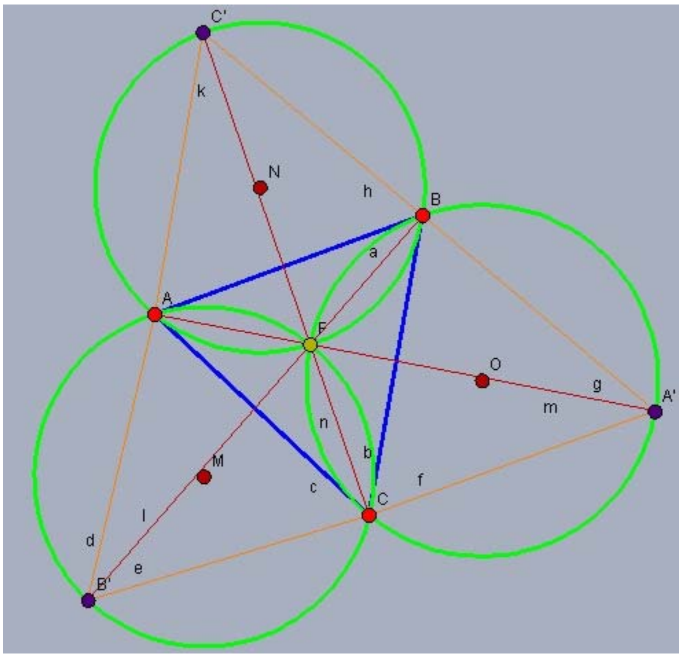
Tale punto se esiste, è detto **punto di Fermat.**

Il problema generò una intensa corrispondenza tra i due ma interessò anche altri matematici dell’epoca quali Cavalieri e Descartes.

Torricelli per primo trovò che la soluzione al problema di Fermat era il punto comune alle tre circonferenze circoscritte ai triangoli equilateri costruiti sui lati del triangolo dette circonferenze di Fermat e vedremo che è possibile collegare questo punto con il teorema di Napoleone.

Questo problema rimase nell’ombra e fu riscoperto da J. Steiner (1796-1863), famoso geometra dell’Università di Berlino che ne diede una prima generalizzazione, che fu ulteriormente estesa da R. Courant (1888-1972) e H. Robbins [1], i quali proposero la ricerca non più di un punto ma di un tracciato che minimizza le distanze fra punti del piano (detto **problema della rete di lunghezza minima di Steiner**).

Teorema 3.1. Dato il triangolo qualunque ABC sia F il punto comune alle tre circonferenze circoscritte ai triangoli di Napoleone tracciati sui lati AB, AC, BC. F è punto di Fermat



Si dimostra che:

$$\angle AFB = \angle AFC = \angle BFC = 120^0$$

Allora la somma[1]

$$FA + FB + FC = f \quad \text{è}\ minima$$

e

$$F\ \text{è}\ il\ punto\ di\ Fermat$$

Questo risultato stabilisce quindi un collegamento tra il teorema di Napoleone e il punto di Fermat-Torricelli.

Il punto di Fermat può essere considerato un punto notevole al pari di baricentro poiché è protagonista di proprietà intrinseche del triangolo.

Va osservato che il punto di Fermat non coincide (in generale) con il baricentro (come si osserva nell'esempio 2, cap.4) e ha una

[1] TEOREMA: Dati tre punti A, B, C se esiste il punto D tale $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA$, allora la somma $DA + DB + DC$ è $minima$.[3]

certa importanza storica, perché è il primo punto notevole dei triangoli del periodo moderno.
Questo punto noto come punto di Fermat – Torricelli viene anche chiamato “il primo centro di isogonia”.

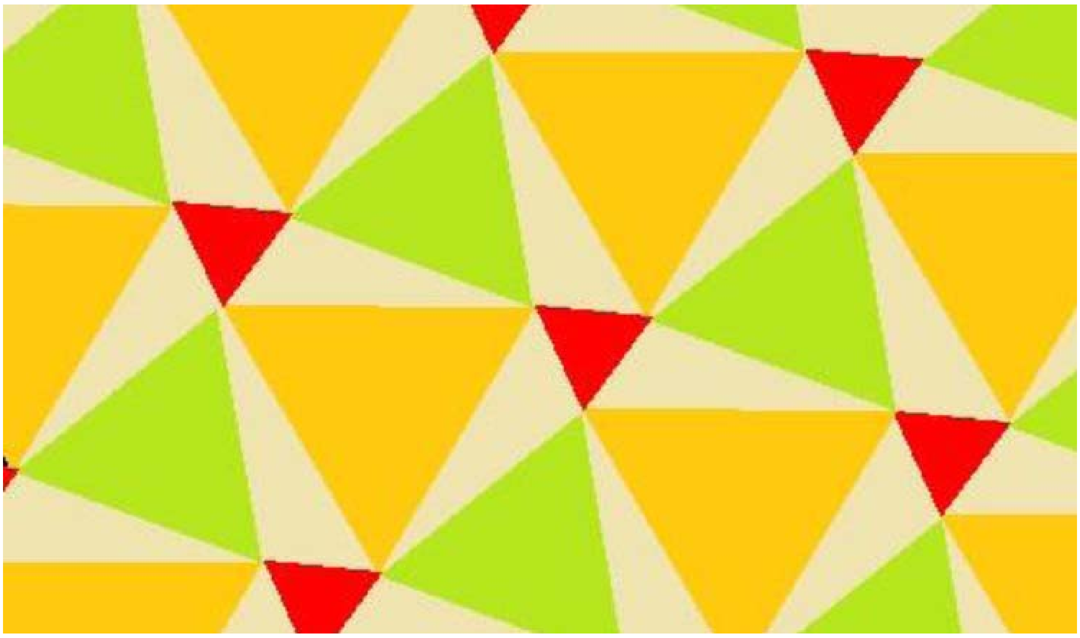
Capitolo 4

APPLICAZIONI

4.1 TASSELLATURE

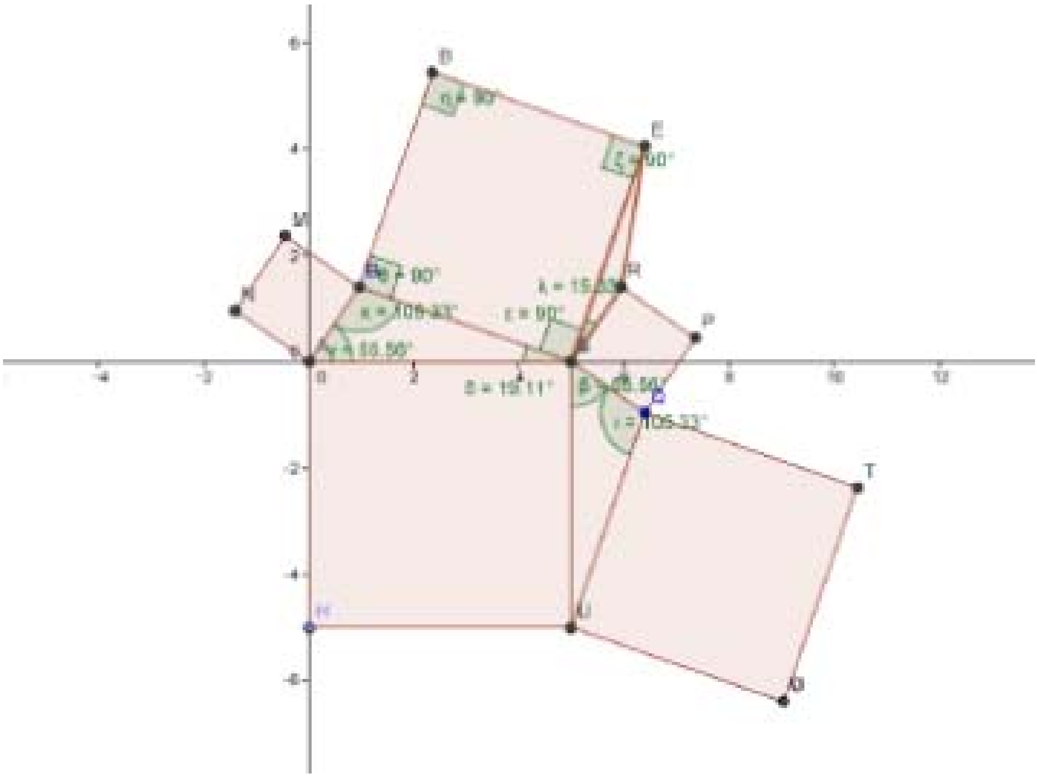
Si dicono tassellature i modi di ricoprire un piano (o in generale lo spazio) con una o più figure geometriche ripetute all’infinito senza alcuna sovrapposizione. Quello che sembra semplicemente un puzzle è in realtà un problema che nasce nell’ antichità e interessa tanti settori, che vanno dal piastrellare pavimenti e rivestire superfici di varia natura, fino ad arrivare allo studio della materia. Nel 1900 il grafico Escher affrontò il problema da un punto di vista matematico, creando così più di quaranta *specie*.

Si può utilizzare il Teorema di Napoleone per ottenere una tassellatura del piano, dando vita alla seguente



Invece se si costruiscono sui lati del triangolo di partenza dei quadrati si osserva che non è possibile eseguire la tassellatura del piano.

Infatti, come mostra la figura, non si riesce sempre a ripetere il triangolo di partenza: il triangolo BRE non è uguale al triangolo di partenza ABC.



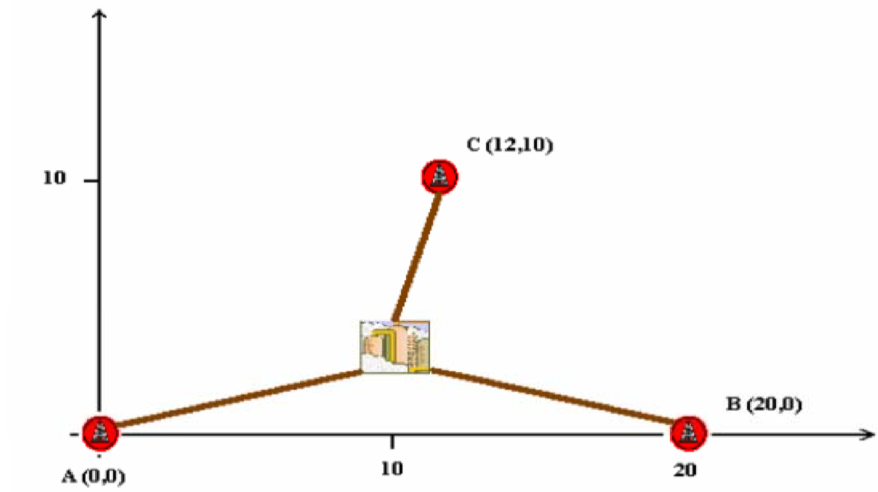
4.2 ESEMPIO 1 (Baricentro)

Una società petrolifera riceve il greggio estratto da tre zone nelle quali si trovano numerosi pozzi, situate rispettivamente nei punti A, B, C. La società vuole costruire una raffineria e deve decidere dove localizzarla in modo da minimizzare i costi di costruzione degli oleodotti. Dalle indagini risulta che **i costi risultano proporzionali ai quadrati delle distanze dagli oleodotti.**

Si deve determinare la migliore posizione per la raffineria.

Supponiamo per comodità che la zona sia pianeggiante e di scegliere un sistema di riferimento con AΞO:

A(0,0), B(20,0), C(12,10)



La soluzione del problema può essere risolta come la ricerca del minimo della funzione "costi" (=distanze al quadrato) data dalla

$z=(x^2+y^2)+((x-20)^2+y^2)+((x-12)^2+(y-10)^2)=3x^2+3y^2-64x-20y+644$

Per quanto visto, la soluzione sarà:

$x=32/3 \quad y=10/3$

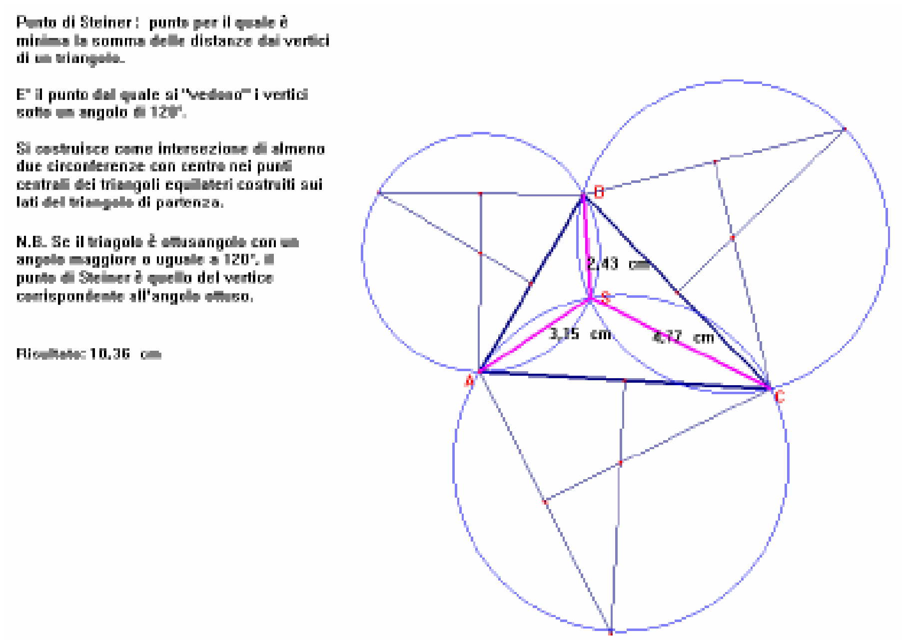
che sono le coordinate del BARICENTRO del triangolo ABC.

4.3 ESEMPIO 2 (Punto di Fermat)

"Tre villaggi A,B,C devono essere congiunti da un sistema di strade di minima lunghezza totale".

Matematicamente: dati tre punti A,B,C sul piano si vuole determinare il punto S del piano tale che sia minima la somma delle distanze di S da A,B,C rispettivamente.

La soluzione ci è fornita dal punto di Torricelli-Fermat che in generale non coincide col baricentro come sarebbe istintivo, infatti il baricentro minimizza la somma dei quadrati delle distanze dai vertici del triangolo.



Come suggeriva Torricelli il punto di minimo si trova:

1) come intersezione di almeno due delle circonferenze con centro nei centri dei triangoli equilateri esterni (triangoli di Napoleone) costruiti sui lati del triangolo di partenza ABC, se nel triangolo tutti gli angoli sono minori di 120°;

2) altrimenti il punto S coincide con il vertice dell'angolo di ampiezza maggiore di 120°.

CONCLUSIONI

Il Teorema di Napoleone e il Problema di Fermat possono sembrare banali, ma la loro importanza sta nel ruolo intrinseco dei punti notevoli che hanno messo in evidenza.

Gli esempi sono molto semplici ma mostrano il vantaggio offerto da tali punti, in certe situazioni, nella ricerca dei minimi, infatti permettono di evitare il ricorso a complesse formule di analisi.

BIBLIOGRAFIA

[1] R.Courant e H.Robbins, *"Che cos'è la matematica?",* Bollati Boringhieri, Torino, 2000

[2] A. Faifofer "*Elementi di Geometria*", Venezia, 1911

[3] G.Loria *"Geometria"* volume I, G. Montanari, Faenza; 1919

[4] F. Markham "*Napoleon*", Signet, 1966

[5] R.Betti "*Lettera Matematica PRISTEM*" #44

[6] J. E. Wetzel "Converses of Napoleon's Theorems", Am. Math. Monthly , #4, 1992

SITOGRAFIA

[1] www.lorenzoroi.net/geometria/ Napoleone

[2] www.robertobigoni.eu/Matematica

[3] www.dm.unipi.it/georgiev/didattica

[4] aereeweb.polito.it/polymath

[5] kesspopinga.blogspot.com

[6] matematica_old.unibocconi.it/betti

[7] www.dm.it/quadernididattici/