



Università degli Studi di Cagliari

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

*Il problema di Didone
ed altri problemi isoperimetrici*

Relatore

Dott. Lucio Cadeddu

Tesi di Laurea di

Claudia Schirru

— Anno Accademico 2010/2011 —

A mia nonna.

Indice

1	Introduzione	5
2	Il problema di Didone	8
3	Problemi isoperimetrici e superperimetrici	10
4	Steiner e la geometria pura	12
4.1	Il Porisma di Steiner	12
4.2	Soluzione di Steiner per il problema isoperimetrico	16
5	I problemi isoperimetrici nel piano	21
5.1	I quadrilateri	21
5.2	I poligoni	24
5.3	Curve che racchiudono domini convessi	31

Capitolo 1

Introduzione

Fra tutte le curve chiuse del piano, di fissato perimetro, quale curva, se esiste, massimizza l'area della regione racchiusa dalla suddetta curva?

In questa semplice domanda posso riassumere l'oggetto della mia tesi: il problema isoperimetrico. Con questa formulazione sembra quasi uno scioglilingua, o un classico, astruso, problema matematico. Potrei però riproporlo in maniera meno rigorosa come segue:

Data una staccionata, come disporla per recintare l'appezzamento di terreno che sia il più grande possibile?

E allora quello che era un complicato rompicapo matematico, diviene una domanda aperta ad ognuno di voi.

Il mio lavoro è stato motivato, e portato avanti con interesse, proprio per il carattere applicativo del problema isoperimetrico. Esso è oggetto di ricerche scientifiche avanzate da decenni e decenni, e contemporaneamente trae le sue origini da bisogni concreti dell'uomo, nati nell'antichità, ma sempre attuali.

Le mie piccole ricerche sono partite appunto dalla nascita del problema isoperimetrico che, come racconto nel secondo capitolo, *“Il problema di Didone”*, risalgono ad alcune leggende. In particolare io ho analizzato quella

di 'Didone e la fondazione di Cartagine', narrata da Virgilio nell'Eneide, ma non è questo l'unico mito che affronta quello che oggi chiamiamo problema isoperimetrico. Anche Tito Livio, nella narrazione della storia della 'Ricompensa di Orazio Coclite', parla di un appezzamento di terreno di assegnato perimetro del quale, il protagonista del mito, poteva stabilire la forma, e quindi l'area a lui più conveniente ([11]). O, discostandoci da quegli autori che appartengono al nostro bagaglio culturale, anche in Danimarca si narra qualcosa di simile. Saxo Grammaticus, letterato danese del XII secolo, narra di Iwar, figlio del leggendario re vichingo Ragnar Lodbrok, al quale fu fatta una proposta quasi uguale a quella che si narra nel mito di Didone ([9]): recintare tanta terra quanta potesse contenerne una pelle di bue.

Mi è parso interessante osservare che il problema isoperimetrico fu oggetto anche di studi non matematici. Lo citarono e sfruttarono anche Cusano, filosofo e scienziato del XV sec. e Keplero, astrologo tedesco che, nel 1596 nel *Mysterium Cosmographicum*, utilizzò il principio isoperimetrico nel discutere la morfologia del sistema solare ([10]).

I primi matematici ad occuparsi della questione furono i greci antichi intorno al IX secolo a.C.. Essi intuitivamente ne trovarono la soluzione, ma solo intorno al 1800 si riuscì a dimostrarla rigorosamente ed in maniera completa. Fra i greci non si sa bene chi fu di preciso ad occuparsene, in alcuni testi si risale ai Pitagorici, ma più certi sono Archimede (Siracusa, 287 a.C. ca. – 212 a.C ca.), e soprattutto Zenodoro (seconda metà II sec. a.C.) ([8]). Le ricerche di quest'ultimo rimasero valide fino al 1700 circa, quando Jakob Steiner (1796–1893) trovò delle dimostrazioni puramente geometriche ed innovative, maggiormente analizzate nel quarto capitolo, "*Steiner e la geometria*", di questa tesi. Tali dimostrazioni però erano imprecise, come notarono molteplici analisti a partire da Dirichlet (1805–1859) per arrivare alla matematica moderna di Ennio De Giorgi (1928–1996). Quest'ultimo se ne occupò nel 1953/54, con l'appoggio anche del matematico Renato Caccioppoli (1904–1959), mostrandoci quanto questo problema sia ancora attuale ([9]).

Precedentemente ho accennato alla soluzione del problema senza specificare quale questa sia. Non è stata una dimenticanza! Infatti supponendo che

la soluzione al problema isoperimetrico esista, ipotesi da non escludere come esplicitato nel terzo capitolo, *“Problemi isoperimetrici e superperimetrici”*, ho visto come questa cambia a seconda delle figure che si possono analizzare nel piano. Nel quinto ed ultimo capitolo, *“I problemi isoperimetrici nel piano”*, infatti, a partire dai semplici quadrilateri per arrivare a domini convessi qualsiasi, ho esplorato le corrispettive disuguaglianze isoperimetriche, le quali legano area e perimetro risolvendo così il problema isoperimetrico.

Capitolo 2

Il problema di Didone

...mercatique solum, facti de nomine Byrsam,
taurino quantum possent circumdare tergo.

(Giunsero in questi luoghi, ov'or vedrai

sorger la gran cittade e l'alta rocca

de la nuova Cartago, che dal fatto

Birsa no mossi, per l'astuta merce

che, per fondarla, fèr di tanto sito

quanto cerchiar di bue potesse in tergo...)

(Eneide: libro 1, 360-368 [1])

La leggenda a cui fa riferimento Virgilio in questo passo dell'Eneide, è quella di Didone, primogenita del re di Tiro.

La successione al trono della bella regina fu contrastata dal fratello Pigmalione, il quale ne uccise il marito prendendo così il comando del regno.

Didone, esule da Tiro, peregrinò con il suo seguito di sudditi, fino a che non approdò sulle coste libiche, tanto affascinanti che nessuno di loro voleva più abbandonarle. La bella regina senza trono doveva quindi trovare un modo per stanziarsi in quelle terre, e fu così che si rivolse a Iarba, re del luogo. Quest'ultimo le promise tanta terra quanta ne potesse contenere una pelle di bue.

Didone non si lasciò sfuggire l'occasione, tagliò la pelle in striscie sottili, le annodò fra di loro ottenendone un lungo filo che dispose in modo tale da recintare la massima estensione di terra, la quale comprendesse anche la costa come richiesto dai suoi seguaci.

Fu così che delimitò quello che sarebbe poi diventato il territorio di Cartagine.

Nella fretta di recintare l'appezzamento di terreno più grande possibile, Didone agì d'istinto, formando con la strisciolina di pelle un semicerchio. Intanto però tutti i peregrini si interrogavano se fosse realmente quella la scelta migliore. E con loro, nel corso dei secoli, molti studiosi e matematici si posero questa domanda, dando adito alla ricerca su quelli che oggi chiamiamo "problemi isoperimetrici". [3, 4]

Capitolo 3

Problemi isoperimetrici e superperimetrici

Vediamo perché, da una semplice leggenda, si è arrivati ad un' importante questione matematica, e per farlo riformuliamo i due problemi prima citati, quello di Didone e quello isoperimetrico:

Problema di Didone: *data una retta r e assegnata una lunghezza $L > 0$, tra tutte le curve piane ¹ che hanno entrambi gli estremi sulla retta r , trovare quella che racchiude area maggiore.*

Problema Isoperimetrico: *data una lunghezza $L > 0$, tra tutte le curve piane chiuse ² di lunghezza L , trovare quella che racchiude area maggiore.*

I due problemi sono essenzialmente equivalenti, come vedremo in seguito nella dimostrazione di Steiner.

Citiamo infine il problema inverso a quello isoperimetrico, detto superperimetrico:

¹**Def.:** Una curva piana è una funzione continua $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, con I intervallo reale.

²**Def.:** Una curva piana chiusa è una curva piana $\varphi : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ che coincide sui suoi estremi, ossia per cui $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Problema superperimetrico: *tra tutte le curve chiuse piane di lunghezza $L \geq 1$, trovare quella che racchiude area maggiore.*

La soluzione a quest'ultimo problema non esiste: data una qualunque curva piana, sarà sempre possibile trovarne un'altra di lunghezza $L \geq 1$ avente area maggiore di quella data. Dimostriamo questa affermazione di seguito. [3]

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo: Sia γ una curva chiusa piana che risolva il problema superperimetrico, e che abbia una qualsiasi forma, per esempio potrebbe essere un quadrato, o un decagono, o una curva a forma di stella. Indipendentemente dalla forma scelta per γ , esisterà sempre una circonferenza sufficientemente grande, di raggio $R \geq 1$ (se così non fosse avremmo una circonferenza degenera che non soddisfa quindi l'ipotesi $L \geq 1$), che contenga tutta la curva. Tale circonferenza ha lunghezza $L = 2\pi R \geq 1$, e racchiude un'area maggiore. In conclusione, γ non può essere la soluzione del problema superperimetrico, contro l'ipotesi, il che è assurdo.

□

Capitolo 4

Steiner e la geometria pura

Jakob Steiner (Berna, 18 marzo 1796 – Berna, 1^o aprile 1863) era un matematico svizzero amante della Geometria Euclidea. Egli rifiutava qualsiasi ragionamento che fosse puramente analitico e diffidava dei calcoli algebrici. Si impegnava a continuare la tradizione dei matematici greci, studiando solo argomenti geometrici sintetici. Veniva per questo considerato il più grande geometra dai tempi di Apollonio.

Per esplicitare questa sua passione possiamo analizzare prima uno dei suoi lavori più significativi, il Porisma di Steiner, per poi occuparci della soluzione che diede al problema di Didone ed ai problemi isoperimetrici. [3]

4.1 Il Porisma di Steiner

Siano \mathcal{C} e \mathcal{C}' due circonferenze di raggi rispettivamente R ed r ($R > r$), una interna all'altra. Sia inoltre γ_1 una circonferenza tangente sia a \mathcal{C} che a \mathcal{C}' e γ_2 un'altra circonferenza tangente a \mathcal{C} , \mathcal{C}' e γ_1 . Infine sia $\gamma_3 \neq \gamma_1$ una circonferenza tangente a \mathcal{C} , \mathcal{C}' e γ_2 , e così via. Allora, la catena di circonferenze $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n$ si chiude se esiste un naturale n tale che γ_n sia tangente a γ_1 , e quindi $\gamma_{n+1} = \gamma_1$.

Quando la catena si chiude, non è importante la posizione iniziale della circonferenza γ_1 , ma soltanto la posizione reciproca delle due circonferenze di partenza \mathcal{C} e \mathcal{C}' .

Una catena chiusa di circonferenze siffatta viene chiamata Catena di Steiner (figura 1).

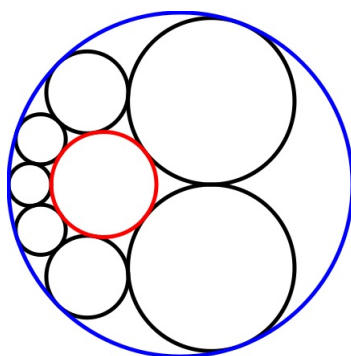


Figura 1: Catena di Steiner ($n=7$).

Dimostrazione. Dimostriamo ora perchè la posizione della prima circonferenza della catena è ininfluente, e per farlo partiamo dal caso di due circonferenze iniziali \mathcal{C} e \mathcal{C}' che siano concentriche (figura 2).

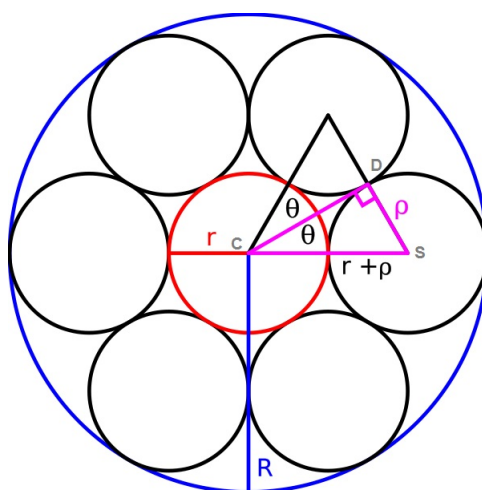


Figura 2: Porisma di Steiner. Circonferenze di base \mathcal{C} e \mathcal{C}' concentriche.

Esaminando la figura 2 data, abbiamo:

- il triangolo CSD è retto in S ;

- $\theta = \frac{\pi}{n}$;
- $DS = \frac{(R-r)}{2}$;
- $CD = r + \frac{(R-r)}{2} = \frac{(R+r)}{2}$.

Per il primo teorema della trigonometria si ha:

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{DS}{CD} = \frac{(R-r)}{(R+r)}$$

da cui:

$$\frac{r}{R} = \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Risulta evidente l'importanza del legame fra il rapporto dei raggi, e quindi la posizione reciproca fra le due circonferenze, e non della posizione occupata dalla prima circonferenza della catena di Steiner.

□

Dobbiamo ora slegarci dall'ipotesi di concentricità delle circonferenze, usata nella dimostrazione precedente, e ricondurci al caso generale di due circonferenze \mathcal{C} e \mathcal{C}' qualsiasi. A tal fine, premettiamo un'importante proprietà dei fasci di circonferenze, omettendone la dimostrazione.

Proprietà. *Date nel piano due qualsiasi circonferenze, prive di punti in comune, è sempre possibile trasformarle, mediante l'inversione, in due circonferenze concentriche.*

Esplicitiamo tale proprietà tramite la seguente costruzione geometrica, rappresentata in figura 3.

1. Consideriamo due circonferenze qualunque \mathcal{C} e \mathcal{C}' non aventi punti in comune, le quali individuano un fascio di circonferenze;
2. Prendiamo poi un punto P non appartenente a nessuna delle due circonferenze;

3. Siano P_1 e P_2 gli inversi di P rispetto alle due circonferenze;
4. La circonferenza \mathcal{C}_1 passante per P , P_1 e P_2 , per costruzione, appartiene al fascio ortogonale rispetto a quello di circonferenze date, perciò sarà ortogonale sia a \mathcal{C} che a \mathcal{C}' ;
5. Si ripete il procedimento appena descritto per un punto $Q \neq P$, ottenendo così una circonferenza \mathcal{C}_2 , ortogonale alle due date;
6. Sia A uno dei punti critici del fascio iperbolico, cioè uno dei punti di intersezione fra le due circonferenze \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , consideriamo il cerchio Γ con centro in A , e le inverse delle due circonferenze \mathcal{C} e \mathcal{C}' rispetto a Γ , ottenendo così due circonferenze concentriche in O .

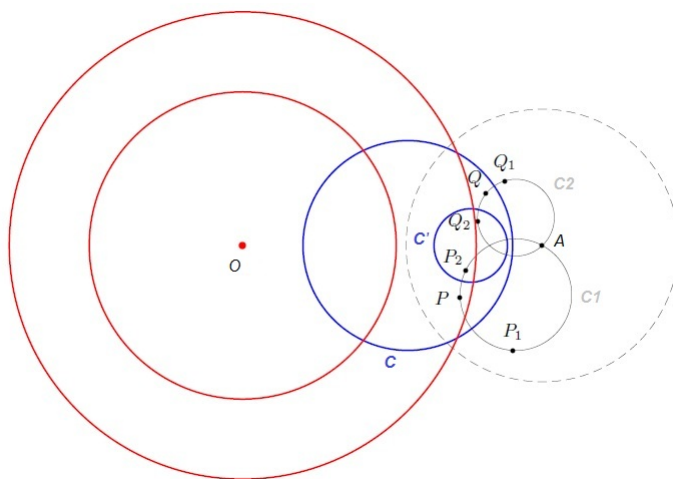


Figura 3: Inversione di due circonferenze in due circonferenze concentriche.

Abbiamo quindi visto che due circonferenze qualsiasi possono essere trasformate, tramite l'inversione rispetto ad un opportuno cerchio, in due circonferenze concentriche. In questa corona circolare è sempre possibile costruirvi una catena di Steiner e ragionare come nella dimostrazione precedente. Solo ora è evidente perchè, date due generiche circonferenze, la posizione della circonferenza iniziale della catena è ininfluente.

Nell'inversione sono mantenute tutte le condizioni di tangenza ma vengono modificati i centri delle circonferenze. Per questo motivo i centri delle

circonferenze non si trovano su una circonferenza, come avverrebbe in una figura simmetrica, ma su un'ellisse avente per fuochi i centri delle circonferenze \mathcal{C} e \mathcal{C}' di base (figura 4). [5]

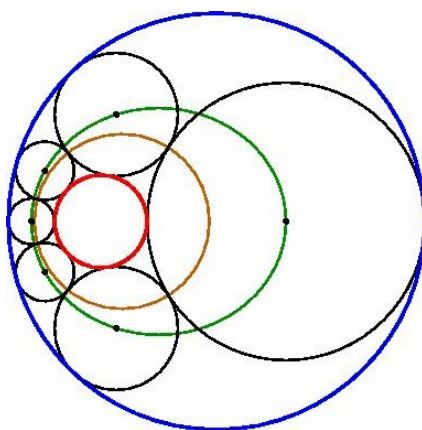


Figura 4: Porisma di Steiner: in verde l'ellisse dei centri.

4.2 Soluzione di Steiner per il problema isoperimetrico

Come anticipato, la soluzione al problema isoperimetrico, non esiste. Se però si modificasse leggermente la definizione aggiungendo delle ipotesi sull'esistenza della figura massimizzante, allora tale soluzione esisterebbe.

Steiner si preoccupò di fornire un'accurata dimostrazione del problema isoperimetrico, che l'analista Dirichlet criticò duramente. Egli osservò che le imprecisioni non erano solo nell'utilizzo dei concetti di curva, continuità ecc. (dei quali ci occuperemo in seguito), ma soprattutto nel procedimento. Steiner infatti aveva sottinteso l'ipotesi di esistenza della figura massimizzante, soluzione del problema isoperimetrico, procedendo poi per esclusione con l'eliminazione di tutte quelle figure che non avrebbero potuto soddisfare l'ipotesi di area massima. [4]

Consideriamo il problema isoperimetrico come esposto nel capitolo 3, con γ curva di lunghezza L e area massima, e analizziamo la dimostrazione di

Steiner, consapevoli del fatto che sarebbe più completa aggiungendo l'ipotesi di esistenza della figura massimizzante.

La dimostrazione fu sintetizzata in tre passi chiave come di seguito.

1) *La regione A racchiusa dalla curva γ deve essere convessa.*

Una regione A è detta convessa se, presi due qualsiasi punti al suo interno, o sulla curva che la delimita, il segmento che li congiunge è totalmente contenuto all'interno della regione stessa.

Dimostrazione. Consideriamo ora due punti sulla curva γ , oggetto del problema isoperimetrico, e uniamoli con un segmento. Se tale segmento è interamente contenuto in A , allora abbiamo concluso; se non è contenuto in A , ribaltiamo intorno a se stesso il tratto di curva che si trova sotto al segmento, ottenendo così una nuova figura avente una sporgenza anziché una rientranza. Ripetiamo la manovra per tutti i punti di γ ottenendo una figura A' che sarà sicuramente convessa. Tale operazione geometrica consiste quindi nel considerare l'involucro convesso, il quale avrà area maggiore di quella di partenza, laddove la lunghezza L della curva rimane invariata. A' ha quindi area maggiore di quella di A , per cui A non era la regione ottimale, mentre quella ottimale deve sicuramente essere convessa.

□

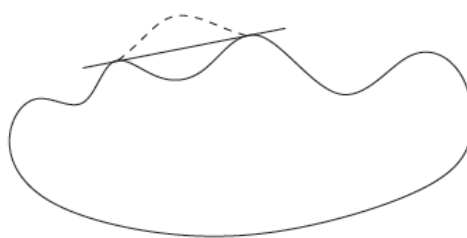


Figura 5: Manovra di ribaltamento.

Notiamo infine che il ragionamento di Steiner è leggermente impreciso nella manovra di ribaltamento. Non conosciamo infatti nessuna informazione

riguardo i due punti sulla curva γ , estremi del segmento. Questi potrebbero essere dei punti critici, e risulta quindi impossibile definire un segmento da essi delimitato. Per rendere più rigoroso il ragionamento bisognerebbe perciò aggiungere alcune ipotesi di continuità per la curva, cosa che però Steiner non accettava preoccupandosi solamente di una costruzione geometrica senza alcuna precisazione di tipo analitico.

2) *La soluzione del problema isoperimetrico è ottenuta raddoppiando la figura che risolve il problema di Didone.*

Data una soluzione D del problema di Didone con assegnata lunghezza pari a $\frac{L}{2}$, consideriamo la figura ottenuta ribaltando una copia di tale soluzione lungo il segmento di base, e unendo le due superfici. La nuova figura, chiamiamola I , avrà perimetro pari a L e area doppia di quella di D . I è la soluzione del problema isoperimetrico.

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo per ipotesi che I non sia la soluzione del problema isoperimetrico, ma che lo sia una regione I' di lunghezza assegnata L . Per definizione di problema isoperimetrico quindi, I' ha area maggiore di I . Presi sulla curva γ' , bordo della regione I' , due punti qualsiasi P e Q che separino archi di lunghezza uguale, e quindi pari a $\frac{L}{2}$, consideriamo il segmento PQ . Quest'ultimo sarà interamente contenuto in I' (per la proprietà di convessità esposta al passo precedente), e divide la regione di piano I' in sottoregioni, una delle quali avrà area maggiore dell'altra. Sia D' quella con area più grande. Dato che I' ha area maggiore di I , allora anche D' avrà area maggiore di D . Questo significa che D' è una soluzione migliore di D , il che è assurdo per definizione di problema di Didone.

Possiamo quindi concludere che se D è la soluzione del problema di Didone, allora I sarà la soluzione del problema isoperimetrico.

□

3) *La soluzione del problema di Didone è un semicerchio, quindi quella del problema isoperimetrico è un cerchio.*

Siano P e Q gli estremi del segmento di base r del problema di Didone, e quindi gli estremi della curva γ . Per dimostrare che γ è una semicirconferenza sfruttiamo la seguente proprietà dei triangoli.

Proprietà. *Ogni triangolo inscritto in una circonferenza è rettangolo.*

Dobbiamo allora far vedere che, qualunque sia il punto M preso sulla curva γ , l'angolo PMQ è retto.

Dimostrazione. Partendo dalla soluzione al problema di Didone consideriamo un punto M sulla curva γ ed eseguiamo la “manovra di Steiner”.

Immaginiamo il triangolo PMQ incernierato alla curva γ in M , in tal modo può variare l'angolo in M , e la curva γ viene divisa in due zone (figura 6).

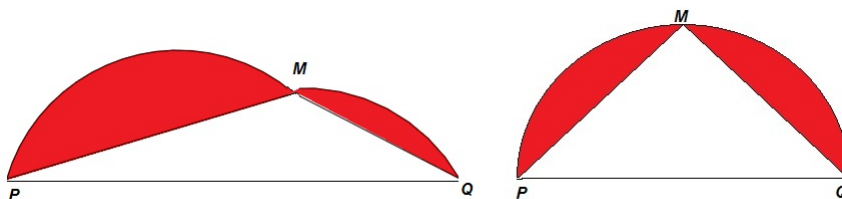


Figura 6: Manovra di Steiner.

Con l'operazione denominata “manovra di Steiner”, allarghiamo e restringiamo l'angolo in M notando che la lunghezza della curva rimane invariata, mentre cambia l'area del triangolo PMQ .

Mostriamo di seguito che l'area di PMQ è massima quando l'angolo in M è retto.

Fissiamo le lunghezze di due lati del triangolo (senza ledere la generalità, possiamo supporre che uno dei due sia la base PM), e facciamo variare l'angolo fra essi compreso (figura 7).

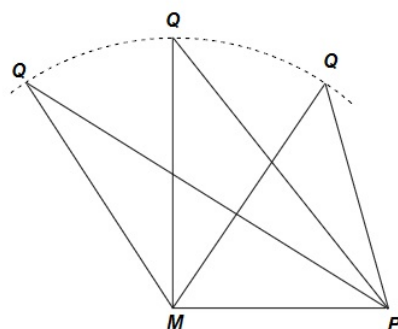


Figura 7: Variazione dell'area del triangolo al variare dell'angolo in M .

Quando questo angolo è retto si ha che l'altezza del triangolo è massima. Siccome l'area di un triangolo è direttamente proporzionale sia alla base che all'altezza, essendo la base fissata, l'altezza massima determinerà un'area massima.

□

Prima di concludere questo terzo ed ultimo passo della dimostrazione notiamo che la manovra di Steiner presenta una lieve imprecisione di tipo tecnico. Egli infatti, non si preoccupò di analizzare i casi estremi, ossia quelli che si ottengono quando $M \equiv P$ o $M \equiv Q$, oppure, più in generale, quando M appartiene al segmento PQ . In queste situazioni infatti il triangolo degenererebbe in una retta e non avrebbe più senso tutta la dimostrazione che abbiamo portato avanti. [3, 6]

Capitolo 5

I problemi isoperimetrici nel piano

Scegliamo nel piano vari insiemi di curve: in primis analizziamo l'insieme dei quadrilateri, poi quello dei poligoni, per arrivare infine al caso generale di curve con dominio convesso qualsiasi in \mathbb{R}^2 . Studiamo l'analogo dei problemi isoperimetrici nei casi elencati e ci troveremo ad analizzare delle disuguaglianze, dette isoperimetriche, che legano area e perimetro. Fissato il perimetro sarà possibile avere la configurazione massimizzante per l'area, come richiesto dal problema isoperimetrico generale, che si riconduce quindi ad essere un problema di massimo.

5.1 I quadrilateri

Teorema 1. *Tra tutti i quadrilateri di perimetro assegnato, il quadrato ha area massima.*

Dimostrazione. Siano a, b, c e d i lati di un quadrilatero avente angoli α, β, γ e δ (figura 8).

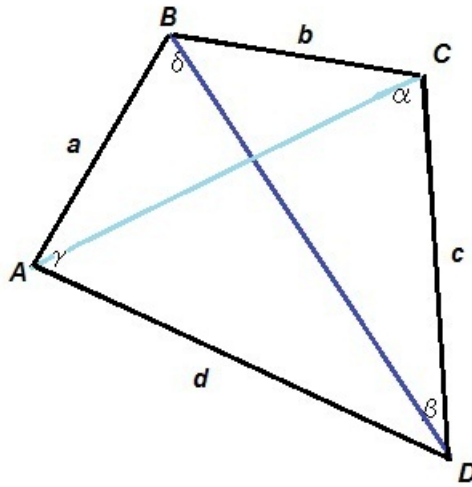


Figura 8: Quadrilatero.

Sia $P = (a + b + c + d)$ il perimetro del suddetto quadrilatero e S la sua area.

Dividiamo il quadrilatero nei due triangoli ABD e BCD (o, ugualmente, nei triangoli ABC e ACD), e applichiamo il teorema dell'area:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}(ad \sin(\gamma)) \quad \text{e} \quad S_{BCD} = \frac{1}{2}(bc \sin(\alpha)),$$

oppure:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(ab \sin(\delta)) \quad \text{e} \quad S_{ACD} = \frac{1}{2}(cd \sin(\beta));$$

Per il quadrilatero avremo:

$$S = (S_{ABD} + S_{BCD}) = (S_{ABC} + S_{ACD})$$

e quindi:

$$S = \frac{1}{2}(ab \sin(\delta) + cd \sin(\beta)) = \frac{1}{2}(ad \sin(\gamma) + bc \sin(\alpha));$$

Sommando le due relazioni, e poi dividendo per 2, otteniamo:

$$S = \frac{1}{4}(ab \sin(\delta) + cd \sin(\beta) + ad \sin(\gamma) + bc \sin(\alpha));$$

Senza alterare il valore del perimetro, maggioriamo l'area tramite le seguenti relazioni e strategie algebriche:

1. $|\sin(x)| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
2. $2|x||y| \leq x^2 + y^2$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
3. raccoglimento a fattor comune.

Da cui:

$$\begin{aligned}
 S &\stackrel{(1)}{\leq} \frac{1}{4}(ab + cd + bc + ad) \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{4}(a+c)(b+d) \\
 &= \frac{1}{8}(a+c)(b+d) + \frac{1}{8}(a+c)(b+d) \\
 &\stackrel{(2)}{\leq} \frac{1}{16}[(a+c)^2 + (b+d)^2 + 2(a+c)(b+d)] \\
 &= \frac{1}{16}(a+b+c+d)^2 = \frac{1}{16}P^2.
 \end{aligned}$$

Considerando solo il primo e l'ultimo membro abbiamo ottenuto la relazione:

$$16S \leq P^2.$$

Questa disuguaglianza, così come tutte quelle presenti nelle maggiorazioni precedenti, sarà un'uguaglianza se e solo se:

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad a = b = c = d$$

e quindi se e solo se il quadrilatero è un quadrato.

□

5.2 I poligoni

Restringiamo lo studio della disuguaglianza isoperimetrica per i poligoni al caso di quelli convessi.[3, 6]

Definizione. Un poligono è detto convesso se ogni segmento congiungente due vertici qualsiasi è interno al poligono stesso.

Equivalentemente (come detto nel paragrafo 3.2) presi due punti qualsiasi interni, o appartenenti alla poligonale chiusa che delimita il poligono, il segmento che li unisce deve essere interamente contenuto in esso.

Ricordando che, per il problema isoperimetrico che dobbiamo risolvere, siamo interessati alla regione di area maggiore, i poligoni convessi risultano essere particolarmente interessanti, dal momento che soddisfano la proprietà seguente.

Proprietà: *dato un n -gono G è possibile costruire un n -gono convesso G' avente area non minore e perimetro non maggiore.*

Dimostrazione. Si ragiona sulla stessa linea seguita nel primo passo della dimostrazione di Steiner.

Dato un n -gono G generico, se questo è convesso abbiamo finito.

Supponiamo invece che G non sia convesso, in questo caso consideriamo il suo involucro convesso G' (figura 9). Quindi tracciamo tutti i segmenti congiungenti due vertici del poligono, e consideriamo solo quelli che risultano essere esterni (ne esiste almeno uno per l'ipotesi di non convessità). Tali segmenti delimitano un nuovo poligono G' che sarà:

- convesso per costruzione;
- con area maggiore perchè abbiamo incorporato a G almeno un triangolo, e quindi G' avrà l'area di G più quella dei suddetti triangoli;

- di perimetro minore, infatti la somma di due lati di un triangolo è sempre maggiore del terzo lato; i triangoli aggiunti per formare G' hanno due lati appartenenti a G e uno a G' .

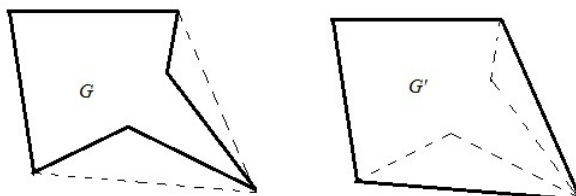


Figura 9: n -goni convessi.

Ora, il poligono G' così ottenuto potrebbe non essere più un n -gono, perchè abbiamo escluso alcuni vertici, per riottenere un n -gono è sufficiente aggiungere tanti vertici fittizi quanto necessario.

□

Sulla base delle premesse appena fatte possiamo dedurre l'analogo del teorema 1 per gli n -goni.

Teorema 2. *Nell'insieme \mathcal{G} degli n -goni convessi aventi perimetro fissato, l' n -gono regolare è quello di area massima.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che esiste un n -gono regolare G' di area maggiore di G . Per fare questo, partendo da G , rendiamolo prima equilatero, e poi equiangolo. Dimostriamo infine che, così facendo l'area aumenta.

Premettiamo le seguenti considerazioni:

1. Sia $P(G)$ la lunghezza del perimetro ed $S(G)$ la sua area.

2. Per ogni $G \in \mathcal{G}$, $P(G) = P$ è un valore fissato. Allora esiste un unico poligono regolare, a meno di rototraslazioni, che abbia tutti i lati di lunghezza $\frac{P}{n}$. Questo poligono sarà quello massimizzante per l'insieme \mathcal{G} .

Sia $G \in \mathcal{G}$, costruiamo il poligono G' equilatero, dove ogni lato ha lunghezza pari a $\frac{P}{n}$, e tale che la sua area sia almeno uguale a quella di G . Se G ha tutti i lati di lunghezza pari a $\frac{P}{n}$, allora abbiamo concluso. Se così non fosse G avrebbe almeno due lati di lunghezza diversa da $\frac{P}{n}$, uno di lunghezza maggiore, e l'altro minore (in quanto il perimetro è fissato ed è uguale a P). Supponiamo che questi due lati siano adiacenti. Tale ipotesi non lede la generalità in quanto è possibile cambiare l'ordine dei lati dell' n -gono senza che si modifichino la misura dell'area e la lunghezza del perimetro. Per dimostrare quest'ultima affermazione consideriamo tre vertici consecutivi A , B e C del poligono, il segmento \overline{AC} ed il suo asse di simmetria. Sia inoltre B' il punto simmetrico di B rispetto a detto asse di simmetria. Scambiando il vertice B con il punto B' otteniamo un n -gono con area e perimetro invariati rispetto a quelli del poligono G di partenza, e che, rispetto a questo, avrà i lati \overline{AB} e \overline{BC} scambiati tra di loro (figura 10).

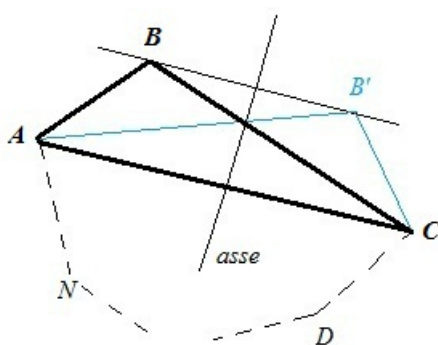


Figura 10: Riflessione.

Tale procedimento di riflessione lascia invariata la proprietà di convessità del poligono.

Proseguendo sempre nella stessa maniera tante volte quante necessario, si possono rendere adiacenti i lati che si desiderano.

Consideriamo inoltre tre vertici consecutivi del poligono, siano A , B e C , tali che:

$$\overline{AB} < \frac{P}{n} \quad \text{e} \quad \overline{BC} > \frac{P}{n};$$

ed un punto B' tale che:

$$\overline{AB'} = \frac{P}{n} \quad \text{e} \quad \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB'} + \overline{B'C}.$$

Dalle precedenti deduciamo ora le seguenti disuguaglianze:

$$\overline{AB} < \overline{AB'} = \frac{P}{n} < \overline{BC};$$

da cui, essendo che $\overline{AB'} > \overline{AB}$, abbiamo:

$$\overline{BC} - \overline{AB} > \overline{BC} - \overline{AB'};$$

$$\overline{B'C} = \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AB'} < \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AB} = \overline{BC}.$$

Confrontiamo ora le aree dei due triangoli $S_{AB'C}$ e S_{ABC} . Per farlo usiamo la formula di Erone per un triangolo qualsiasi di lati a , b e c , e di semiperimetro $p = \frac{a+b+c}{2}$:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

che, in forma equivalente, può essere scritta slegandosi dal perimetro, come segue:

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2)}.$$

Utilizzando quest'ultima avremo:

$$16S_{ABC}^2 = ((\overline{AB} + \overline{BC})^2 - \overline{AC}^2)(\overline{AC}^2 - (\overline{AB} - \overline{BC})^2);$$

$$16S_{AB'C}^2 = ((\overline{AB'} + \overline{B'C})^2 - \overline{AC}^2)(\overline{AC}^2 - (\overline{AB'} - \overline{B'C})^2);$$

e quindi, sfruttando le disuguaglianze precedenti:

$$S_{AB'C} > S_{ABC}.$$

Abbiamo così dimostrato che è possibile costruire un n -gono con area maggiore e perimetro uguale a quello di G . Ripetendo il procedimento descritto, per un massimo di $(n - 1)$ volte, riusciamo a costruire un n -gono G' che abbia area maggiore di quella di G , perimetro $P(G') = P(G) = P$, e con tutti i lati uguali di lunghezza $\frac{P}{n}$.

Il primo passo, ossia quello di rendere G equilatero, è così concluso. Ci resta ora da vedere come renderlo equiangolo e dimostrare che, in questa maniera, l'area aumenta ancora. A tal fine sfruttiamo il procedimento della manovra di Steiner e dividiamo la dimostrazione in due casi a seconda che il numero dei vertici degli n -goni sia pari o dispari.

Se $n = 2k$ (con $k \in \mathbb{N}$) consideriamo un vertice P di G , ed il suo vertice opposto Q , il quale sarà esattamente il k -esimo vertice contando da P . La diagonale \overline{PQ} divide il poligono in due parti, se queste sono uguali, non modifico la figura; altrimenti prendo la parte avente area maggiore, detta Σ , e la ribalto rispetto al segmento \overline{PQ} , con questo procedimento di riflessione ottengo quindi un poligono con area maggiore e perimetro invariato. Consideriamo ora un vertice R del nuovo poligono, ed una circonferenza circoscritta al triangolo PRQ , in modo tale che rimangano fissati, la lunghezza di tutti i lati e tutti gli angoli tranne quello in R (figura 11). Applicando la manovra di Steiner a questo triangolo abbiamo che l'area aumenta.

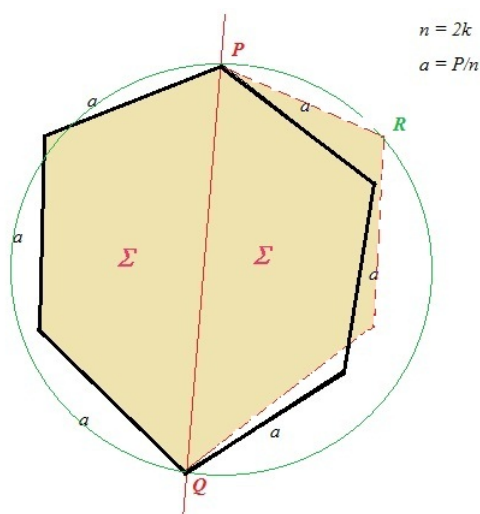


Figura 11: Manovra di Ribaltamento e manovra di Steiner per $2k$ -goni, con $k = 3$.

Ripetiamo poi il procedimento per i restanti vertici del poligono ottenendo un $2k$ -gono regolare.

Se $n = (2k + 1)$ (con $k \in \mathbb{N}$), consideriamo la circonferenza circoscritta al $(2k + 1)$ -gono regolare avente i lati di lunghezza $\frac{P}{n}$. Costruiamo poi il triangolo isoscele avente un lato ed il vertice opposto, chiamiamolo B , sulla circonferenza, laddove il vertice è scelto in modo tale che non interschi il poligono inscritto. Abbiamo così ottenuto un $(2k + 2)$ -gono avente $2k$ lati invariati e due più piccoli, rispetto al poligono di partenza. Consideriamo ora il segmento avente come estremi il vertice aggiunto B , ed il vertice ad esso opposto, chiamiamolo A (figura 12). Tale segmento \overline{AB} dividerà il poligono in due parti, ragioniamo come sopra per il segmento \overline{PQ} , ed operando tramite la manovra di Steiner, otteniamo un poligono avente tutti i vertici sulla circonferenza di diametro AB .

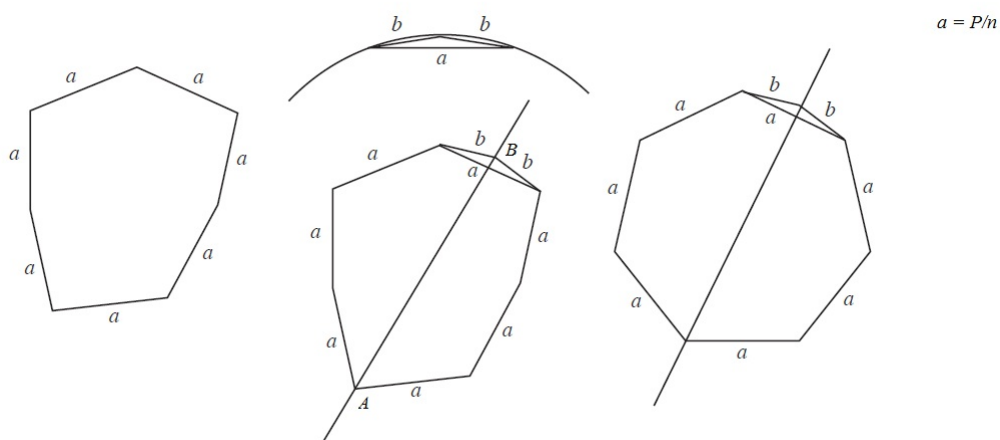


Figura 12: Manovra Steiner per un $(2k + 1)$ -agono, con $k = 3$

Nell'operazione di manovra il suddetto triangolo isoscele potrebbe deformarsi per poi tornare esattamente quello di partenza una volta raggiunta la configurazione ottimale, momento in cui può essere eliminato ottenendo esattamente un $(2k + 1)$ -gono regolare con lo stesso lato di quello iniziale, ossia $\frac{P}{n}$, che avrà però area massima.

Dimostrato anche il secondo passo, abbiamo che l' n -gono con area massima è quello equilatero ed equiangolo, e quindi regolare.

□

Esplicitiamo infine la disuguaglianza isoperimetrica per n -goni regolari.

Sia G un poligono regolare di lato lungo l e perimetro:

$$P(G) = nl.$$

Il calcolo dell'area non è immediato, serviamoci quindi della trigonometria e del triangolo isoscele individuato da un qualsiasi lato e dal centro dell' n -gono (figura 13).

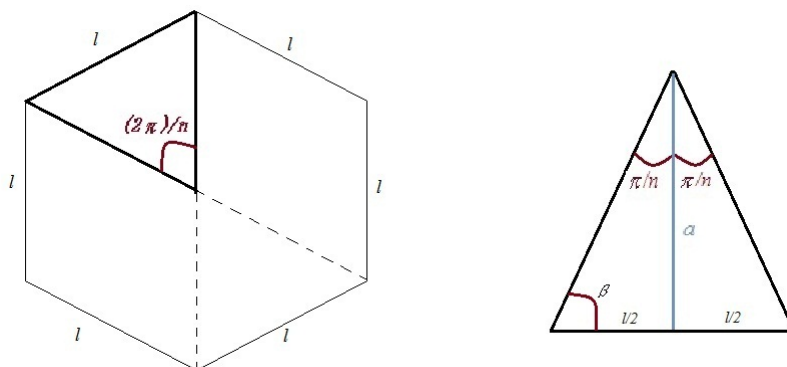


Figura 13: n -gono regolare ($n=6$) e particolare sul triangolo isoscele.

Detto triangolo isoscele ha come altezza l'apotema, chiamiamolo a , dell' n -gono. Consideriamo quindi il triangolo rettangolo, ottenuto dividendo a metà, tramite l'altezza, il triangolo suddetto. Dai teoremi della trigonometria e usando gli archi associati abbiamo:

$$a = \frac{l}{2} \tan(\beta) = \frac{l}{2} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = \frac{l}{2} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{l}{2} \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)};$$

da cui, essendo S l'area del triangolo isoscele:

$$S(G) = nS = n \frac{la}{2} = \frac{1}{2} nl \frac{l}{2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{1}{2} nl \frac{nl}{2n \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{P^2(G)}{4n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Considerando che, per il teorema 2, ogni altro n -gono che abbia la stesso perimetro avrà area minore, la disuguaglianza perimetrica per un generico n -gono G sarà:

$$4n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) S(G) \leq P^2(G).$$

5.3 Curve che racchiudono domini convessi

Dato un dominio D nel piano, ossia un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 , ci occuperemo di calcolare la misura della sua area e la lunghezza della sua frontiera, per poi dedurre da queste la corrispondente disuguaglianza isoperimetrica.

Il metodo con il quale opereremo è quello di ricondurci ad un caso conosciuto, e più precisamente al caso dei poligoni.

Inoltre, restringiamo l'analisi dei domini a domini convessi, ossia ai sottoinsiemi aperti e convessi di \mathbb{R}^2 , questi, come osservato nella dimostrazione di Steiner (4.2), hanno sicuramente area maggiore di un dominio qualsiasi.

Sia ∂D la frontiera di un generico dominio convesso D , e siano P_1, \dots, P_k , k suoi punti. Consideriamo il poligono G_k avente come vertici i k punti scelti ed avremo che (figura 14) :

- $P(G_k) \leq L(\partial D)$, ossia il perimetro del poligono è una buona approssimazione della lunghezza della frontiera ∂D . Questo intuitivamente è dato dal fatto che un segmento è la curva con lunghezza minore che unisce due punti qualsiasi del piano;
- $S(G_k) \leq S(D)$, ossia l'area di G_k approssima l'area del dominio convesso D . La disuguaglianza è data dal fatto che D , essendo convesso, ha area massima, e che il poligono è interamente contenuto nel dominio.

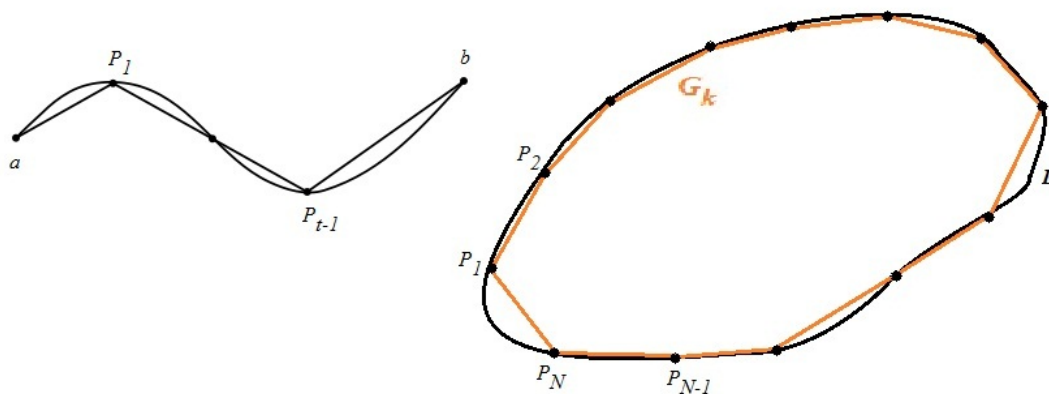


Figura 14: Poligoni.

Vediamo in maniera rigorosa le precedenti disuguaglianze e considerazioni tramite i seguenti teoremi.

Teorema 3. Se $\varphi : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva regolare a tratti ¹, si ha che:

$$L(\varphi) := \sup \{L(P), P \in \mathcal{P}([a, b])\},$$

con $\mathcal{P}([a, b])$ insieme delle partizioni ² di $[a, b]$.

Consideriamo ora il seguente lemma, che utilizzeremo poi per la dimostrazione del teorema 3.[2, 7]

Lemma 1. Sia $g(t)$ una funzione continua nell'intervallo $[\alpha, \beta]$ a valori in \mathbb{R}^n , e sia $t_0 \in [\alpha, \beta]$. Si ha che:

$$\int_{\alpha}^{\beta} |g(t)| dt - 2 \int_{\alpha}^{\beta} |g(t) - g(t_0)| dt \leq \left| \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt \right|.$$

Dimostrazione lemma 1. Si ha:

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = (\beta - \alpha)g(t_0) + \int_{\alpha}^{\beta} \{g(t) - g(t_0)\} dt.$$

Usiamo ora la disuguaglianza triangolare per ottenere la seguente catena di disuguaglianze:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt \right| &\geq (\beta - \alpha) |g(t_0)| - \left| \int_{\alpha}^{\beta} \{g(t) - g(t_0)\} dt \right| \\ &\geq \int_{\alpha}^{\beta} |g(t_0)| dt - \int_{\alpha}^{\beta} |g(t) - g(t_0)| dt. \quad (1) \end{aligned}$$

D'altra parte sappiamo che:

$$|g(t_0)| \geq |g(t)| - |g(t) - g(t_0)|,$$

da cui:

¹**Def.:** Una curva γ di equazione $r = r(t)$ si dice regolare se $r \in C^1(I)$ e se $r'(t) \neq 0 \forall t \in I$.

Si dice regolare a tratti se I si può suddividere nell'unione di un numero finito di intervalli su ciascuno dei quali γ è regolare.

²**Def.:** Sia $I = [a, b]$ un intervallo, una partizione \mathcal{P} di I è una $(k+1)$ -upla $(t_0, \dots, t_k) \in [a, b]^{k+1}$ con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$. Se \mathcal{P} è una partizione di I poniamo:

$$\|\mathcal{P}\| = \max_{1 \leq j \leq k} |t_j - t_{j-1}|.$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |g(t_0)| dt \geq \int_{\alpha}^{\beta} |g(t)| dt - \int_{\alpha}^{\beta} |g(t) - g(t_0)| dt. \quad (2)$$

Prese contemporaneamente la (1) e la (2), si ha la tesi del teorema.

□

Dimostrazione teorema 3. Per ipotesi aggiuntiva, φ sia anche regolare. Per la prima disuguaglianza partiamo da $P = (t_0, t_1, \dots, t_N)$, partizione di $[a, b]$.

Si ha:

$$\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t) dt,$$

da cui, per il lemma precedente,

$$|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(t)| dt.$$

Sommando per $i = 1, \dots, N$ otteniamo:

$$\begin{aligned} L(P) &= \sum_{i=1}^N |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(t)| dt = \int_a^b |\varphi'(t)| dt = L(\varphi). \end{aligned}$$

Essendo valida per ogni partizione P di $[a, b]$, allora:

$$L(\varphi) \geq \sup \{L(P)\}.$$

D'altra parte osserviamo che $\varphi'(t)$ è continua in $[a, b]$, il quale è un intervallo chiuso e limitato, e quindi compatto. Perciò $\varphi'(t)$ è anche uniformemente continua in quanto continua su un compatto. Per l'uniforme continuità abbiamo che:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tale che, se } t, t_0 \in [a, b] \text{ con } |t - t_0| < \delta, \text{ risulta che} \\ |\varphi'(t) - \varphi'(t_0)| < \varepsilon.$$

Ora, sia $\varepsilon > 0$ e sia P una partizione di $[a, b]$ in intervalli $[t_{i-1}, t_i]$, ognuno di ampiezza $|t_i - t_{i-1}| < \delta$, per il lemma precedente troviamo:

$$\begin{aligned}
& | \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) | = | \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t) dt | \\
& \geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} | \varphi'(t) | dt - 2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} | \varphi'(t) - \varphi'(t_0) | dt, \\
& \text{con } t_0 \in [t_{i-1}, t_i].
\end{aligned}$$

Al variare di t nell'intervallo $[t_{i-1}, t_i]$, per la continuità uniforme, si ha che:

$$| t - t_0 | < \delta \implies | \varphi'(t) - \varphi'(t_0) | < \varepsilon.$$

Allora:

$$| \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) | \geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} | \varphi'(t) | dt - 2\varepsilon(t_i - t_{i-1}).$$

Sommando da 1 a N abbiamo:

$$L(P) = \sum_{i=1}^N | \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) | \geq \int_a^b | \varphi'(t) | dt - 2\varepsilon(b - a),$$

quindi:

$$\sup \{L(P)\} \geq L(\varphi) - 2\varepsilon(b - a).$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha che:

$$\sup \{L(P)\} \geq L(\varphi).$$

Abbiamo così dimostrato che $\sup \{L(P)\}$ è contemporaneamente maggiore o uguale e minore o uguale alla lunghezza della curva φ , ed è quindi valida l'uguaglianza della tesi del teorema.

□

Ora, data una curva regolare a tratti $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, e definita una partizione $\mathcal{D} = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = b\}$ di $[a, b]$ tale che per $k = 0, \dots, n$ si abbia $\varphi(t_k) = P_k$, l'insieme dei punti P_k definisce la poligonale G_k . La lunghezza della suddetta poligonale sarà:

$$L(G_k) = P(G_k) = \sum_{k=1}^n |P_k - P_{k-1}| = \sum_{k=1}^n |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|.$$

Quindi, per il teorema 3, si ha che:

$L(\varphi) = \sup \{L(P) : P \in \mathcal{D}([a, b])\} \geq P(G_k)$, essendo $P(G_k)$ uno degli $L(P)$ dell'insieme degli estremi superiori.

Abbiamo ora tutti gli strumenti necessari a dimostrare il teorema, analogo a quello dei paragrafi precedenti, riguardante la disuguaglianza isoperimetrica per un generico dominio convesso.

Teorema 4. *Sia D un dominio, cioè un aperto convesso, avente come frontiera ∂D una curva C^1 a tratti, allora vale:*

$$4\pi S(D) \leq L^2(\partial D).$$

L'uguaglianza vale se e solo se D è un cerchio.

Dimostrazione. I teoremi e le considerazioni precedentemente dimostrate ci permettono di affermare che:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P(G_k) = L^2(\partial D) \text{ e } \lim_{k \rightarrow +\infty} S(G_k) = S(D).$$

Cioè, per k abbastanza grande, le aree e i perimetri dei poligoni sono una buona approssimazione della lunghezza della frontiera e dell'area racchiusa dal dominio convesso D . Questo significa che quando k cresce, i punti P_i che scegliamo sulla frontiera ∂D sono sempre più vicini, ossia, in maniera rigorosa, deve essere soddisfatta la seguente:

$$\sup_{j=1, \dots, k} \{|P_j - P_{j-1}|\} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Partiamo quindi dalla disuguaglianza isoperimetrica trovata per i poligoni:

$$4k \tan\left(\frac{\pi}{k}\right) S(G_k) \leq P(G_k).$$

Passando al limite, e usando il limite notevole della tangente, si ottiene che:

$$4k \tan\left(\frac{\pi}{k}\right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 4\pi,$$

e quindi:

$$4\pi S(D) \leq L^2(\partial D).$$

Dimostriamo infine l'ultima doppia implicazione del teorema.

(\Leftarrow) Se D è un cerchio di raggio r abbiamo che:

$$S(D) = \pi r^2 \text{ e } L(\partial D) = 2\pi r;$$

da cui:

$$4\pi S(D) = 4\pi(\pi r^2) = 4\pi^2 r^2 = (2\pi r)^2 = L^2(\partial D);$$

e quindi è valida l'uguaglianza.

(\Rightarrow) Viceversa se è vera l'uguaglianza, allora vale la seguente:

$$S(D) = \frac{L^2(\partial D)}{4\pi} = \frac{1}{2}L(\partial D)\frac{L(\partial D)}{2\pi} = \frac{1}{2}L(\partial D)r$$

la quale è la formula che lega area e perimetro di un cerchio di raggio r , perciò D è un cerchio.

□

Bibliografia

- [1] P. Virgilio Marone, Eneide, trad. C. Vivaldi, Edisco Torino.
- [2] E. Giusti, Analisi Matematica. Volume 2, Bollati Boringhieri, 1988.
- [3] P.D'Ancona, E.Montefusco, Il dubbio di Didone, in Ricordando Franco Conti, 59-79, Pubbl. Cent. Ric. Mat. Ennio Giorgi, Scuola Norm. Sup., Pisa, 2004.
- [4] S. Campi, Due teoremi isoperimetrici inversi, Dip. Ingegneria dell'Informazione ,Siena, 2008.
- [5] L. Battaia, Il porisma di Steiner, www.batmath.it/cabri/steiner/steiner.pdf, 2007.
- [6] D. Castellaneta, Superfici Minime e congetture di De Giorgi, http://www.ma.utexas.edu/mp_arc/c/06/06-305.pdf.
- [7] S.Salsa, C.D. Pagani, Analisi Matematica 2, Masson, 1998.
- [8] T.H. Porter, A History of the classical Isoperimetric Problem, 1931.
- [9] G. Di Meglio, www.matematicamente.it, 2010.
- [10] E.T. Bell. I grandi matematici. Sansoni editrice, 1990.
- [11] Ti, libro II, capoversi I-X, capoverso X