Università degli studi di Cagliari

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN MATEMATICA

ANALISI COMPLESSA E APPLICAZIONI

Relatore:
Prof. Lucio Cadeddu

Tesi di Laurea di:
Valentina Mameli

Anno Accademico 2007/08

Introduzione

Nella seguente tesi sono trattati alcuni aspetti di base della teoria delle funzioni di una variabile complessa. In particolare nel primo capitolo vengono richiamati i numeri complessi che saranno utili nella trattazione successiva.
Nel secondo capitolo vengono sviluppate le funzioni olomorfe e vengono dimostrate in dettaglio le proprietà di cui godono.
Nel terzo e ultimo capitolo, che rappresenta la parte più importante della tesi, analizziamo il concetto di residuo, enunciamo e dimostriamo l'importante teorema dei residui, il quale è uno strumento molto efficace per il calcolo di alcuni tipi di integrali, difficili da risolvere con tecniche di variabile reale.
Infine, nell'appendice, vengono richiamati dei concetti fondamentali sulle forme differenziali che vengono largamente utilizzati nel secondo capitolo.

Indice

Capitolo 1

I numeri complessi

Un numero complesso z può essere definito come una coppia ordinata $z = (x, y)$ di numeri reali x e y. Indicheremo con $\mathbb{C}$ tale insieme di coppie che quindi può essere identificato con l'insieme $\mathbb{R}^2$. Introduciamo su $\mathbb{C}$ una operazione di somma e una di prodotto nel seguente modo. Dati i numeri complessi $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ la somma dei due numeri è così definita:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

il prodotto invece si definisce in questo modo:

$$z_1 * z_2 = (x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Tali operazioni dotano $\mathbb{C}$ della struttura di campo.
L'insieme dei numeri complessi del tipo $(a, 0)$, con $a \in \mathbb{R}$, è isomorfo a $\mathbb{R}$; cioè $\mathbb{C}$ è un ampliamento di $\mathbb{R}$.
Il numero complesso $i := (0, 1)$ è detto l'unità immaginaria, e si ha

$$i^2 = i * i = (0, 1) * (0, 1) = -1 \in \mathbb{R}.$$

Utilizzando ciò possiamo rappresentare il numero complesso $z = (a, b)$ nella forma $z = a + ib$, infatti si ha

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + ib.$$

La scrittura $z = a+ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ prende il nome di forma algebrica dei numeri complessi.

Definizione 1.0.1. *Se $z = a + ib$ è un numero complesso, la parte reale $Re(z)$ di z è il numero reale a, mentre la parte immaginaria $Im(z)$ di z è il numero reale b. Se $Re(z) = 0$ (cioè se $z = ib$), il numero complesso z si dice immaginario puro.*

Definizione 1.0.2. *Il complesso coniugato di un numero complesso $z = a + ib$ è il numero complesso $\overline{z} = a - ib$. L'applicazione $^{-} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ che associa a un numero complesso il suo complesso coniugato si chiama coniugio.*

Definizione 1.0.3. *Il modulo di un numero complesso $z = a + ib$ è il numero reale $|z| = \sqrt{z * \overline{z}} = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.*

Le proprietà del coniugio e del modulo sono riassunte nelle prossime due Proposizioni.

Proposizione 1.0.1. *Siano z_0, z_1, z_2 numeri complessi. Allora*

- $z_0 + \overline{z_0} = 2Re(z_0)$;
- $z_0 - \overline{z_0} = 2Im(z_0)$;
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

- $\overline{z_1 * z_2} = \overline{z_1} * \overline{z_2}$;

- $\overline{\overline{z_0}} = z_0$;

- $\overline{(\frac{1}{z_0})} = \frac{1}{\overline{z_0}}$;

- $z_0^{-1} = \frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2}$.

Proposizione 1.0.2. *Siano z_0, z_1, z_2 numeri complessi. Allora*

- $|z_0| \geq 0$ *e* $|z_0| = 0$ *se e solo se* $z_0 = 0$;

- $|\overline{z_0}| = |z_0|$;

- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$;

- $|Re(z_0)|, |Im(z_0)| \leq |z_0| \leq |Re(z_0)| + |Im(z_0)|$;

- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Possiamo rappresentare il numero complesso $z = a + ib$ in forma trigonometrica ponendo:

$$\begin{cases} a = \rho\cos(\theta) \\ b = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

si ottiene $z = a + ib = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.
Il prodotto e il quoziente di due numeri complessi
$z_1 = \rho_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$, $z_2 = \rho_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$ sono dati dalle seguenti formule:

$$z_1 * z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)); \tag{1.1}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)). \tag{1.2}$$

Proposizione 1.0.3 (Formula di De Moivre).
Sia $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \in \mathbb{C}$. *Allora*

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione. Questa formula si dimostra utilizzando il **principio d'induzione matematica**. Procediamo per induzione su n.
Per $n = 1$ si ha $z^1 = \rho^1(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ per cui è banalmente vera. Supponiamo che sia vero per $n-1$ e dimostriamolo per n. Allora z^{n-1} è un numero complesso di modulo ρ^{n-1} e argomento $(n-1)\theta$, per cui per la 1.1 si ha:

$$\begin{aligned} z^n =& z^{n-1} * z = \rho^{n-1}(\cos((n-1)\theta) + i\sin((n-1)\theta)) * \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \\ =& \rho^n(\cos(\theta + (n-1)\theta) + i\sin(\theta + (n-1)\theta)) = \\ =& \cos(n\theta) + i\sin(n\theta). \end{aligned}$$

□

Definizione 1.0.4. *Sia* $w \in \mathbb{C}$ *e* $n \geq 1$. *Una radice n-esima di* w *è un numero complesso* z *tale che* $z^n = w$.

Proposizione 1.0.4. *Sia* $w \in \mathbb{C}$ *un numero complesso diverso da zero e* $n \geq 1$. *Allora esistono esattamente n radici distinte n-esime* $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}$ *di* w. *Se* $w = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ *allora*

$$z_k = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \tag{1.3}$$

per $k = 0, \cdots, n-1$, *dove* $\rho^{\frac{1}{n}}$ *indica l'unica radice n-esima reale positiva di* ρ.

Dimostrazione. Grazie alla formula di De Moivre si ha

$$
\begin{aligned}
z_k^n &= \left(\rho^{\frac{1}{n}}\right)^n \left(\cos\left(\frac{n(\theta+2k\pi)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{n(\theta+2k\pi)}{n}\right)\right) = \\
&= \rho(\cos(\theta+2k\pi) + i\sin(\theta+2k\pi)) = \\
&= \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = w
\end{aligned}
$$

per $k = 0, \cdots, n-1$, per cui $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}$ sono effettivamente radici n-esime di w.
Viceversa, se $z = r(\cos(\psi) + i\sin(\psi))$ è tale che $z^n = w$, si deve avere $r^n = \rho$ e $\cos(n\psi) = \cos(\theta)$ e $\sin(n\psi) = \sin(\theta)$,
dunque $r = \rho^{\frac{1}{n}}$ e $n\psi = \theta + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Per cui z è della forma 1.3.
Siccome $z_{k+\alpha n} = z_k$ per ogni $k, \alpha \in \mathbb{Z}$ rimane da dimostrare che i numeri $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}$ sono diversi fra loro. Dimostriamolo per assurdo, supponiamo che esistano $0 \leq h, k \leq n-1$ tali che $z_h = z_k$.
Allora $\cos(\frac{\theta+2h\pi}{n}) = \cos(\frac{\theta+2k\pi}{n})$ e $\sin(\frac{\theta+2h\pi}{n}) = \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})$ e quindi deve esistere un $l \in \mathbb{Z}$ tale che $\frac{\theta+2h\pi}{n} = \frac{\theta+2k\pi}{n} + 2l\pi$, si ha quindi che $\frac{2h\pi}{n} - \frac{2k\pi}{n} = \frac{2(h-k)\pi}{n} = 2\frac{h-k}{n}\pi = 2l\pi$ e perciò $h-k$ deve essere un multiplo intero di n. Ma h e k sono entrambi compresi tra 0 e $n-1$; quindi necessariamente $h = k$. $\square$

Ricordiamo la rappresentazione esponenziale dei numeri complessi:

$$z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \rho e^{i\theta}.$$

Questa formula è detta **formula di Eulero**.
Attraverso questa formula possiamo calcolare le potenze e le radici

n-esime di z agevolmente. Abbiamo infatti:

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = \rho^n e^{in\theta};$$

$$z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}.$$

Capitolo 2

Le funzioni olomorfe

2.1 Nozioni preliminari

Consideriamo le funzioni il cui dominio e codominio è l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$.
E' noto che $\mathbb{R}^2$ è uno spazio metrico, poiché esiste una corrispondenza tra $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$, possiamo dunque affermare che anche $\mathbb{C}$ viene dotato della struttura di spazio metrico. Dato quindi un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ possiamo definire un intorno di z_0.

Definizione 2.1.1. *Dato $\delta > 0$ si definisce intorno di z_0 e raggio δ l'insieme*

$$B_\delta(z_0) = \left\{ \ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta \ \right\}.$$

Definizione 2.1.2. *Dato $\delta > 0$ si definisce intorno bucato di z_0 e raggio δ l'insieme*

$$B^*_\delta(z_0) = \left\{ \ z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta \ \right\}.$$

Per cui z_0 appartiene all'intorno di centro z_0 e raggio δ ma non appartiene all'intorno bucato di centro z_0 e raggio δ.

Definizione 2.1.3. *Sia* $I \subseteq \mathbb{C}$. *Si dice che l'insieme* I *è aperto se per ogni* $z \in I$ *esiste un* $\delta > 0$ *tale che il disco* $B_\delta(z)$ *sia contenuto in* I.

Definizione 2.1.4. *Sia* $I \subseteq \mathbb{C}$. *Si dice che l'insieme* I *è un insieme chiuso se e solo se il suo complementare* $\mathbb{C} \setminus I$ *è un insieme aperto.*

Definizione 2.1.5. *Sia* $I \subseteq \mathbb{C}$ *e sia* $z_0 \in I$. *Si dice che* z_0 *è un punto interno di* I *se esiste un* $\delta > 0$ *tale che il disco* $B_\delta(z_0)$ *sia contenuto in* I. *L'insieme dei punti interni ad* I *si chiama* interno di I *e si indica con Int(*I*).*

Definizione 2.1.6. *Sia* $I \subseteq \mathbb{C}$ *e sia* $z_0 \in I$. *Si dice che* z_0 *è un punto esterno di* I *se esiste un* $\delta > 0$ *tale che il disco* $B_\delta(z_0)$ *sia tale che* $B_\delta(z_0) \cap I = \emptyset$.
In altre parole se z_0 *è un punto interno di* $\mathbb{C} \setminus I$. *L'insieme dei punti esterni ad* I *si chiama* esterno di I *e si indica con Est(*I*).*

Definizione 2.1.7. *Sia* $I \subseteq \mathbb{C}$ *e sia* $z_0 \in I$. *Si dice che* z_0 *è un punto di frontiera per* I *se non è né un punto interno né esterno. L'insieme dei punti di frontiera ad* I *si chiama* frontiera di I *e si indica con Fr(*I*).*

Definizione 2.1.8. *Sia* $I \subseteq \mathbb{C}$. *Si definisce chiusura di* I, *che indichiamo con* $\overline{I}$, *il più piccolo sottoinsieme chiuso di* $\mathbb{C}$ *contenente* I. *I punti di* $\overline{I}$ *si dicono punti di aderenza o di chiusura di* I.

Definizione 2.1.9. *Sia $I \subseteq \mathbb{C}$. Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice punto di accumulazione dell'insieme I se ogni intorno di z_0 contiene almeno un punto di I diverso da z_0, cioè*

$$(B_\delta(z_0)\backslash\{z_0\}) \cap I \neq \emptyset \qquad \textit{per ogni } B_\delta(z_0).$$

L'insieme dei punti di accumulazione di I si chiama derivato di I *e si indica con $D(I)$.*

In particolare utilizzando la nozione di intorno bucato si ha:

Definizione 2.1.10. *Sia $I \subseteq \mathbb{C}$. Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice punto di accumulazione dell'insieme I se ogni intorno bucato di z_0 contiene almeno un punto di I, cioè*

$$B^*_\delta(z_0) \cap I \neq \emptyset \qquad \textit{per ogni } B^*_\delta(z_0).$$

Consideriamo una funzione $f(z)$ definita in $I \subseteq \mathbb{C}$ a valori complessi. Ponendo $z = x + iy$ e $f(z) = Re(f(z)) + iIm(f(z))$, la funzione

$$f : I \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

si può identificare con la funzione

$$f : I \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

che ha come componenti le funzioni $Re(f(x, y))$ e $Im(f(x, y))$.
Diamo ora la definizione di limite.

Definizione 2.1.11. *Sia $I \subseteq \mathbb{C}$ e z_0 un punto di accumulazione. Sia $f(z)$ una funzione definita in I a valori complessi. Diciamo che* *la funzione f è convergente al numero $l \in \mathbb{C}$ al tendere di z a z_0 e scriveremo*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l$$

quando

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : z \in B^*_\delta(z_0) \cap I \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Si può provare che:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim_{z \to z_0} Re(f(z)) = Re(l) \\ \lim_{z \to z_0} Im(f(z)) = Im(l). \end{cases}$$

Mostriamo che se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l$$

allora $|Re(f(z)) - Re(l)| < \varepsilon$ e $|Im(f(z)) - Im(l)| < \varepsilon$.
Ma

$$|Re(f(z)) - Re(l)| \leq^{(1)} |f(z) - l| <^{(2)} \varepsilon,$$

e

$$|Im(f(z)) - Im(l)| \leq^{(3)} |f(z) - l| <^{(4)} \varepsilon.$$

Viceversa supponiamo che valgano

$$\lim_{z \to z_0} Re(f(z)) = Re(l)$$

[1]Per la 4 della proposizione 1.0.2.
[2]Per la definizione di limite.
[3]Per la 4 della proposizione 1.0.2.
[4]Per la definizione di limite.

e

$$\lim_{z \to z_0} Im(f(z)) = Im(l)$$

e dimostriamo che $|f(z) - l| < \varepsilon$.

Da

$$\lim_{z \to z_0} Re(f(z)) = Re(l)$$

abbiamo

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : z \in B^*_\delta(z_0) \cap I \Rightarrow |Re(f(z)) - Re(l)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e da

$$\lim_{z \to z_0} Im(f(z)) = Im(l)$$

abbiamo

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : z \in B^*_\delta(z_0) \cap I \Rightarrow |Im(f(z)) - Im(l)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

dunque

$$\begin{aligned} |f(z) - l| &= |Re(f(z)) - Re(l) + i(Im(f(z)) - Im(l))| \leq \\ &\leq |Re(f(z)) - Re(l)| + |Im(f(z)) - Im(l)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

2.2 Le funzioni di variabile complessa

Definiamo alcune funzioni complesse.

2.2.1 La funzione esponenziale

Sia $z = x + iy$, poniamo

$$e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

In particolare, se $z = x$ è reale ($y = 0$) si ritrova $e^z = e^x$ e quindi l'esponenziale reale.
Se $z = iy$ è immaginario puro ($x = 0$) si trova $e^{iy} = (\cos(y) + i\sin(y))$ che è la formula di Eulero.
In generale abbiamo $e^z = e^{z+2k\pi i} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$.
Quindi l'esponenziale complesso è una funzione periodica, con periodo $2\pi i$, per cui non è una funzione iniettiva.
Possiamo determinare la parte reale e la parte immaginaria della funzione esponenziale. La parte reale è la funzione
$u(x, y) = e^x\cos(y)$, la parte immaginaria è $v(x, y) = e^x\sin(y)$.
Servendosi dell'esponenziale complesso, si definiscono le funzioni trigonometriche complesse.

2.2.2 Funzioni trigonometriche

Per $z \in \mathbb{C}$ abbiamo:

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \qquad \text{con } z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ con k intero.}$$

Per tali funzioni continuano a valere molte proprietà valide per le analoghe funzioni reali: formule di addizione, di duplicazione e di prostaferesi, la formula fondamentale della trigonometria ed altre. Dimostriamo la formula fondamentale:

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1.$$

Sostituendo le definizioni di $\sin(z)$ e di $\cos(z)$ otteniamo:

$$\begin{aligned}\cos^2(z) + \sin^2(z) &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \\ &= \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2 - e^{2iz} - e^{-2iz} + 2}{4} = 1.\end{aligned}$$

2.2.3 Funzioni iperboliche

Mediante la funzione esponenziale si definiscono anche le funzioni iperboliche. Per $z \in \mathbb{C}$ abbiamo:

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} \qquad \text{con } z \neq \frac{i\pi}{2} + ik\pi, \text{ con k intero.}$$

Per tali funzioni continuano a valere molte proprietà valide per le analoghe funzioni reali: formule di addizione, di duplicazione e di prostaferesi, la formula fondamentale ed altre. Dimostriamo la formula fondamentale:

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1.$$

Sostituendo le definizioni di $\sinh(z)$ e di $\cosh(z)$ otteniamo:

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2 - e^{2z} - e^{-2z} + 2}{4} = 1.$$

Le funzioni iperboliche possono essere espresse tramite le funzioni trigonometriche. Questo è il loro legame:

$$\sinh(z) = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i^2} = \frac{1}{i}\sin(iz)$$

$$\cosh(z) = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \cos(iz).$$

Conoscendo questo legame possiamo calcolare la parte reale e la parte immaginaria di $\sin(z)$ e di $\cos(z)$, per far ciò utilizziamo la formula di addizione del seno e del coseno rispettivamente:

$$\sin(z) = \sin(x + iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) =$$
$$= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$

dunque la parte reale di $\sin(z)$ è la funzione $u(x, y) = \sin(x)\cosh(y)$, la sua parte immaginaria è $v(x, y) = \cos(x)\sinh(y)$.
Ora facciamo lo stesso per il $\cos(z)$:

$$\cos(z) = \cos(x + iy) = \cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\sin(iy) =$$
$$= \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

dunque la parte reale di $\cos(z)$ è la funzione $u(x, y) = \cos(x)\cosh(y)$, la sua parte immaginaria è $v(x, y) = -\sin(x)\sinh(y)$. Da ciò si deduce che il modulo delle funzioni $\sinh(z)$ e di $\cosh(z)$ non è minore o uguale a 1.

Infatti

$$\begin{aligned}|\sin(z)|^2 &= \sin^2(x)\cosh^2(y) + \cos^2(x)\sinh^2(y) = \\ &= \sin^2(x)\cosh^2(y) + (1-\sin^2(x))\sinh^2(y) = \\ &= \sin^2(x) + \sinh^2(y),\end{aligned}$$

sappiamo che $\sin^2(x)$ è minore di 1 ma $\sinh^2(y)$ non è limitato.

2.2.4 Il logaritmo complesso

Sia $z = |z|e^{iarg(z)}$, con $z \neq 0$; il logaritmo complesso di z è un numero complesso tale che:

$$e^{log(z)} = z$$

ciò si può anche scrivere nel seguente modo:

$$e^{Re(log(z))}e^{iIm(log(z))} = |z|e^{iarg(z)}.$$

Dunque deve aversi:

$$\begin{cases} e^{Re(log(z))} = |z| \\ e^{iIm(log(z))} = e^{iarg(z)} \end{cases}$$

da cui si ricava

$$log(z) = ln|z| + iarg(z)$$

dove con $ln|z|$ si è indicato il logaritmo naturale di $|z|$. Sappiamo che $e^{iarg(z)} = e^{i(arg(z)+2k\pi)}$, dunque

$$log(z) = ln|z| + i(arg(z) + 2k\pi)$$

per cui dato $z \in \mathbb{C}$ esistono infiniti logaritmi di z, essi hanno tutti la stessa parte reale (il logaritmo reale del modulo di z). La differenza fra due determinazioni è $2ik\pi$.
Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione
$log(z) = ln|z| + iarg(z) \qquad \text{con} \qquad \alpha \leq arg(z) < \alpha + 2\pi, z \neq 0$
è una determinazione del logaritmo definita in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ad un solo valore. Posto $\alpha = \pi$ la funzione
$log(z) = ln|z| + iarg(z) \qquad \text{con} \qquad -\pi \leq arg(z) < \pi, z \neq 0$
è chiamata determinazione principale del logaritmo.

2.3 Le funzioni olomorfe

Definizione 2.3.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$. Consideriamo una funzione $f(z)$ definita in Ω a valori complessi. Sia $z_0 \in \Omega$ e supponiamo che esista finito il limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

In tal caso diciamo che la funzione f è derivabile in senso complesso o che è olomorfa nel punto z_0.

Una funzione olomorfa in z_0 è continua in tal punto.

Definizione 2.3.2. *Una funzione si dice olomorfa in Ω se è olomorfa in tutti i punti di Ω.*

Definizione 2.3.3. *Una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$ si dice intera.*

Elenchiamo qui di seguito degli esempi di funzioni che sono derivabili in senso complesso e altre che non lo sono.

Esempio 2.3.1. Sia

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \overline{z}$$

verifichiamo che la funzione non è derivabile in $\mathbb{C}$. Infatti sia $z_0 = x_0 + iy_0$; il rapporto incrementale in z_0 è

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0}.$$

Se consideriamo la restrizione del rapporto incrementale alla retta $z = x_0 + iy$, con $y \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \frac{-iy + iy_0}{i(y - y_0)} = -1.$$

Se invece scegliamo la restrizione alla retta $z = x + iy_0$, con $x \in \mathbb{R}$ il rapporto incrementale diventa

$$\frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

La funzione non è quindi derivabile in senso complesso in z_0 in quanto il limite non esiste.

Esempio 2.3.2. Sia

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto z$$

verifichiamo che la funzione è derivabile in $\mathbb{C}$. Calcoliamo il rapporto incrementale della funzione f

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1.$$

La funzione è quindi derivabile in $\mathbb{C}$ per cui è una funzione intera e la sua derivata è identicamente uguale a 1.

Si può notare negli esempi precedenti che entrambe le funzioni considerate dal punto di vista reale avevano componenti di classe C^∞, ma dal punto di vista complesso solo una era derivabile. Il seguente teorema caratterizza le funzioni derivabili in senso complesso.

Teorema 2.3.1 (Teorema di Cauchy-Riemann). *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto e $f(z)$ una funzione definita in Ω a valori complessi. Sia $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Poniamo $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. La funzione $f(z)$ è olomorfa in z_0 se e soltanto se le seguenti condizioni sono verificate:*

(i) u, v sono differenziabili in (x_0, y_0);

(ii) $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$, $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$.

Quando le condizioni sono soddisfatte risulta

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = \frac{1}{i}(u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)).$$

Dimostrazione. Supponiamo che la funzione sia olomorfa nel punto z_0 e poniamo $f'(z_0) = a + ib$. Dalla definizione di derivata si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0) = \\ &= u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + a(x - x_0) - b(y - y_0) + \\ &\quad + i(a(y - y_0) + b(x - x_0)) + o(z - z_0), \end{aligned}$$

per $z \to z_0$.

Per la parte reale di f possiamo scrivere

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x_0, y_0) + a(x - x_0) - b(y - y_0) + Re(o(z - z_0)) = \\ &= u(x_0, y_0) + a(x - x_0) - b(y - y_0) + \\ &\quad + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right) \end{aligned}$$

con $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Ciò è equivalente a dire che la funzione u delle variabili reali x e y è differenziabile nel punto (x_0, y_0). Consideriamo invece ora la parte immaginaria

$$\begin{aligned}
v(x,y) &= v(x_0,y_0) + a(y-y_0) + b(x-x_0) + Im(o(z-z_0)) = \\
&= v(x_0,y_0) + a(y-y_0) + b(x-x_0) + \\
&\quad + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)
\end{aligned}$$

con $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Per cui anche la funzione v delle variabili reali x e y è differenziabile nel punto (x_0, y_0). Si può vedere che $u_x(x_0, y_0) = a$ e che $u_y(x_0, y_0) = -b$, inoltre si ha che $v_x(x_0, y_0) = b$ e che $v_y(x_0, y_0) = a$, per cui $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$ e $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$. Abbiamo così dimostrato che se è olomorfa allora u e v sono funzioni differenziabili e soddisfano la proprietà (ii).

Dimostriamo ora il viceversa cioè se u e v sono differenziabili e soddisfano la (ii) allora f è olomorfa.

Essendo u e v differenziabili si ha che

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= u(x_0,y_0) + u_x(x_0,y_0)(x-x_0) + u_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \\
&\quad + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)
\end{aligned}$$

con $(x, y) \to (x_0, y_0)$ e

$$\begin{aligned}
v(x,y) &= v(x_0,y_0) + v_x(x_0,y_0)(x-x_0) + v_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \\
&\quad + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)
\end{aligned}$$

con $(x, y) \to (x_0, y_0)$ e quindi

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + (u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0))(z - z_0) + o(z - z_0) = \\ &= f(z_0) + \frac{1}{i}(u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0))(z - z_0) + o(z - z_0) = \\ &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0) \end{aligned}$$

per $z \to z_0$. Dunque è derivabile in senso complesso.

$\square$

Per verificare se una funzione è olomorfa basta vedere se valgono le condizioni di Cauchy-Riemann. Quindi basta verificare che la parte reale e la parte immaginaria di f siano continue e che valga

$$u_x(x, y) + iv_x(x, y) = \frac{1}{i}(u_y(x, y) + iv_y(x, y))$$

quest'ultima si può scrivere più brevemente nel seguente modo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Riguardiamo gli esempi precedenti e verifichiamo che i risultati trovati siano in accordo con il teorema di Cauchy-Riemann.

Esempio 2.3.3. La funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \overline{z} \end{aligned}$$

anche per il teorema non è olomorfa in quanto si ha $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ e $\frac{1}{i}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -1$, per cui

$$\frac{\partial f}{\partial x} \neq \frac{1}{i}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Esempio 2.3.4. La funzione

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto z$$

anche per il teorema è olomorfa in quanto si ha $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ e $\frac{1}{i}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 1$, per cui

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Teorema 2.3.2. *Siano $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ due funzioni olomorfe allora:*

(i) $\lambda f + \mu g$ è una funzione olomorfa per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$;

(ii) $f * g$ è una funzione olomorfa;

(iii) se $g(z) \neq 0$, allora $\frac{f(z)}{g(z)}$ è una funzione olomorfa;

(iv) $g \circ f$ è una funzione olomorfa.

Esprimiamo le condizioni di olomorfia in coordinate polari. Sia $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una funzione olomorfa in un aperto Ω. Poniamo $z = \rho e^{i\theta}$, con $(\rho, \theta) \in \Omega'$ tale che il corrispondente punto $z = \rho e^{i\theta} \in \Omega$.
Poniamo

$$g(\rho, \theta) = f(\rho e^{i\theta}) = u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + iv(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

Si ha allora

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial \rho} = (u_x + iv_x)\cos\theta + i(v_y - iu_y)\sin\theta = f'(\rho e^{i\theta})e^{i\theta} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} = i\rho\left[i(u_x + iv_x)\sin\theta + (v_y - iu_y)\cos\theta\right] = i\rho f'(\rho e^{i\theta})e^{i\theta} \end{cases} \tag{2.2}$$

e quindi

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} = \frac{1}{i\rho}\frac{\partial g}{\partial \theta}. \tag{2.3}$$

Viceversa se vale quest'ultima si ha, per la 2.2, la seguente uguaglianza:

$$(u_x + iv_x)\cos\theta + (v_y - iu_y)\sin\theta = i(u_x + iv_x)\sin\theta + (v_y - iu_y)\cos\theta$$

per cui :

$$\left[(u_x + iv_x) - (v_y - iu_y)\right] e^{-i\theta} = 0$$

da cui, essendo $e^{-i\theta} \neq 0$, si ricava $(u_x + iv_x) = (v_y - iu_y)$ e quindi questo implica l'olomorfia di f.

Esempio 2.3.5. Sia n un intero positivo. La funzione z^n è intera. Infatti si ha:

$$\begin{aligned}
Dz^n &= \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} z^j h^{n-j}}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ h^{n-1} + nzh^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-2} z^{n-2}h + \binom{n}{n-1} z^{n-1} \right\} = \\
&= \binom{n}{n-1} z^{n-1} = \\
&= nz^{n-1}.
\end{aligned}$$

Esempio 2.3.6. La funzione esponenziale

$$e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = u(x,y) + iv(x,y)$$

con $u(x,y) = e^x\cos(y)$ e $v(x,y) = e^x\sin(y)$ è intera e si ha $De^z = e^z$. Facciamo vedere che sono verificate le condizioni di

Cauchy-Riemann, infatti si ha:

$$\frac{\partial e^z}{\partial x} = e^x(\cos y + i \sin y) = \frac{1}{i} e^x(-\sin y + i \cos y) = \frac{1}{i}\frac{\partial e^z}{\partial y}.$$

Dunque ciò implica che la funzione è olomorfa e dunque per il teorema di Cauchy-Riemann

$$De^z = u(x,y)_x + iv(x,y)_x = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^z.$$

Esempio 2.3.7. Ricordiamo che

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = u(x,y) + iv(x,y)$$

con $u(x,y) = \sin x \cosh y$ e $v(x,y) = \cos x \sinh y$.

Vogliamo far vedere che $D \sin z = \cos z$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sin z}{\partial x} &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = \cos z = \\ &= \frac{1}{i}(\sin x \sinh y + i \cos x \cosh y) = \frac{1}{i}\frac{\partial \sin z}{\partial y}.\end{aligned}$$

Quindi la funzione è olomorfa e dunque per il teorema di Cauchy-Riemann si ha:

$$D\sin(z) = u(x,y)_x + iv(x,y)_x = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = \cos z.$$

Esempio 2.3.8. In modo del tutto analogo si ottengono le seguenti:

$$\begin{aligned} D\cos z &= -\sin z; \\ D\cosh z &= \sinh z; \\ D\sinh z &= \cosh z; \\ D\tan z &= \frac{1}{\cos^2 z}; \\ D\tanh z &= \frac{1}{\cosh^2 z}. \end{aligned}$$

2.4 Integrali su cammini

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione complessa di variabile reale e supponiamo che $Re(f)$ e $Im(f)$ siano sommabili in $[a, b]$ poniamo

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b Re(f(t))dt + i \int_a^b Im(f(t))dt.$$

Proviamo la seguente diseguaglianza:

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leqslant \int_a^b \Big| f(t) \Big| dt. \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Essendo $\int_a^b f(t)dt$ un numero complesso possiamo scriverlo sotto forma esponenziale nel seguente modo:

$$\int_a^b f(t)dt = \left| \int_a^b f(t)dt \right| \exp{(i\varphi)}$$

moltiplicando ambo i membri per $\exp{(-i\varphi)}$ otteniamo

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t)dt \right| &= \exp{(-i\varphi)} \int_a^b f(t)dt = \int_a^b Re(\exp{(-i\varphi)} f(t))dt = \\ &= \int_a^b \Big| Re(\exp{(-i\varphi)} f(t)) \Big| dt \leq \int_a^b \Big| \exp{(-i\varphi)} f(t) \Big| dt = \\ &= \int_a^b |f(t)| dt. \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza è valida in quanto

$$\begin{aligned} \Big| \exp{(-i\varphi)} f(t) \Big|^2 &= \exp{(-i\varphi)} f(t) * \overline{\exp{(-i\varphi)} f(t)} = \\ &= \exp{(-i\varphi)} f(t) * \overline{f(t)} \exp{(i\varphi)} = f(t) * \overline{f(t)} = |f(t)|^2. \end{aligned}$$

□

Definizione 2.4.1. *Sia* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *una funzione continua. Sia* γ *un cammino congiungente i punti* $z_0, z_1 \in \Omega$*, cioè una curva regolare con sostegno contenuto in* Ω *di equazione parametrica*

$$\begin{aligned} z : [a,b] &\longrightarrow \Omega \\ t &\longmapsto z(t) \end{aligned}$$

tale che $z(a) = z_0$ *e* $z(b) = z_1$*. Poniamo*

$$(\gamma)\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz := \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Lemma 2.4.1 (Darboux)**.** *Sia* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *una funzione continua. Sia* γ *un cammino congiungente i punti* $z_0, z_1 \in \Omega$*. Allora*

$$\left|(\gamma)\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz\right| \leq |\gamma| \max_{\textit{sostegno } \gamma} |f(z)|$$

dove $|\gamma|$ *indica la lunghezza della curva* γ*.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \left|(\gamma)\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(z(t))z'(t)|dt \leq \\ \leq \max_{\textit{sostegno } \gamma} |f(z)| \int_a^b |z'(t)|dt = |\gamma| \max_{\textit{sostegno } \gamma} |f(z)|. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.4.1 (Cauchy-Goursat)**.** *Sia* $f(z)$ *una funzione olomorfa nell'aperto* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *e sia* T *un dominio regolare contenuto in* Ω*. Allora*

$$\int_{+\partial T} f(z)dz = 0.$$

Conseguenze del teorema 2.4.1 sono i seguenti teoremi.

Teorema 2.4.2 (Prima formula di Cauchy)**.** *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa nell'aperto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e sia T un dominio regolare contenuto in Ω. Allora per ogni $z \in Int(T)$, si ha*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{+\partial T} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Dimostrazione. Sia $z \in Int(T)$. La frontiera del dominio T è un insieme compatto e quindi $dist(z, \partial T) > 0$. Posto $T' = T \setminus B_\delta(z)$ con $0 < \delta < dist(z, \partial T)$, anche T' è un dominio regolare e inoltre la funzione $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ è olomorfa in quanto rapporto di due funzioni olomorfe; possiamo quindi applicare il teorema 2.4.1 per il dominio T' e si ha

$$\int_{+\partial T'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0.$$

Quindi per l'additività dell'integrale curvilineo e introducendo le equazioni parametriche della circonferenza $\partial B_\delta(z)$: $\xi = z + \delta e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$ possiamo scrivere

$$0 = \int_{+\partial T'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{+\partial T} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{+\partial B_\delta(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

ma

$$\int_{+\partial B_\delta(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =^{(5)} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \delta e^{it})}{\delta e^{it}} i\delta e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z + \delta e^{it}) dt.$$

Passiamo al limite per $\delta \to 0$; essendo

$$|f(z + \delta e^{it})| \leq \max_T |f(z)|,$$

[5]Per la definizione 2.4.1.

con $0 < \delta < dist(z, \partial T)$ e per ogni $t \in [0, 2\pi]$, è possibile passare al limite sotto il segno d'integrale per il Teorema di Lebesgue e si ha

$$2i\pi f(z) = \int_{+\partial T} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

da cui dividendo per $2i\pi$ si ottiene la tesi. $\square$

Il seguente teorema è molto importante in quanto mostra la differenza fra le funzioni C^1 di una variabile reale e le funzioni olomorfe. Infatti quest'ultime sono infinitamente derivabili mentre per una funzione f di variabile reale si ha in generale che
$f \in C^1 \not\Rightarrow f \in C^\infty$.

Teorema 2.4.3 (Seconda formula di Cauchy)**.** *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa nell'aperto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Allora $f(z)$ è di classe $C^\infty(\Omega)$. Inoltre per ogni dominio regolare $T \subset \Omega$ e per ogni intero $n \in \mathbb{N}$ si ha*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{+\partial T} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \tag{2.5}$$

dove $z \in Int(T)$.

Dimostrazione. Sia T un dominio regolare. Dimostriamo che

$$f^{'}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{+\partial T} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

dove $z \in Int(T)$. Sia $z^* \in Int(T)$, consideriamo il disco $B_\delta(z^*)$, con $0 < \delta < dist(z^*, \partial T)$ per cui $B_\delta(z^*) \subset Int(T)$. Per la prima formula di Cauchy si ha

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{+\partial T} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

deriviamo ambo i membri rispetto a x

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{+\partial T}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{+\partial T}\frac{f(\xi)}{\xi-(x+iy)}d\xi\right).$$

Dobbiamo ora verificare che sia possibile derivare sotto il segno di integrale, ma ciò è lecito in quanto per $\xi \in \partial T$ e $z \in B_\delta(z^*)$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(\xi)}{\xi-(x+iy)}\right)\right| = \left|\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\right| \leq \max_T |f| \frac{1}{(dist(z^*,\partial T)-\delta)^2}$$

e si ottiene così

$$f'(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{+\partial T}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi\right) = \left(\frac{1}{2i\pi}\int_{+\partial T}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi\right).$$

Ciò è valido in $B_\delta(z^*)$ e quindi è valido anche in $Int(T)$ in quanto z^* è arbitrario. Sia $z^* \in \Omega$ e $R > 0$ tale che $\overline{B_R(z^*)} \subset \Omega$, e sia $0 < r < R$, mostriamo che anche f' è olomorfa, cioè vale la seguente formula:

$$\frac{\partial f'(z)}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f'(z)}{\partial y}$$

in $B_r(z^*)$ e per l'arbitrarietà di z^* in Ω. In tal modo dimostriamo anche che $f \in C^2$.

Abbiamo appena dimostrato che

$$f'(z) = \left(\frac{1}{2i\pi}\int_{+\partial T}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi\right),$$

ma questa si può scrivere anche per $z \in B_R(z^*)$ e per cui si ha

$$f'(z) = \left(\frac{1}{2i\pi}\int_{+\partial B_R(z^*)}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi\right).$$

Siccome per $\xi \in \partial B_R(z^*)$ e $z \in B_r(z^*)$ si ha

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(\xi)}{(\xi-(x+iy))^2}\right)\right| = \left|\frac{2f(\xi)}{(\xi-z)^3}\right| \leq 2\max_{B_R(z^*)}|f|\frac{1}{(R-r)^3}$$

possiamo derivare sotto il segno di integrale e si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x} f'(z) = \left(\frac{2}{2i\pi} \int_{+\partial B_R(z^*)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi \right)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} f'(z) = \left(\frac{2i}{2i\pi} \int_{+\partial B_R(z^*)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi \right).$$

Per cui vale

$$\frac{\partial f'(z)}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f'(z)}{\partial y}$$

e inoltre per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale si ha che $\frac{\partial f'(z)}{\partial x}, \frac{\partial f'(z)}{\partial y} \in C^0(B_r(z^*))$ quindi valgono entrambe le condizioni del teorema di Cauchy-Riemann, per cui f è olomorfa in Ω ed è C^2. La tesi segue per induzione. $\square$

2.5 Primitive delle funzioni complesse

Definizione 2.5.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Diciamo che la funzione $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ è una primitiva di $f(z)$ se è olomorfa e risulta $F'(z) = f(z)$ in Ω.*

Teorema 2.5.1. *Sia $f(z)$ una funzione definita in un insieme aperto connesso $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e sia $F(z)$ una primitiva di $f(z)$. Allora tutte e sole le primitive di $f(z)$ sono date dalle funzioni $F(z) + k$, al variare di k costante arbitraria.*

Dimostrazione. La funzione $F(z) + k$, con $k \in \mathbb{C}$ è ancora una primitiva di $f(z)$. Occorre dimostrare che tutte e sole le primitive di $f(z)$ sono le funzioni $F(z)+k$. Sia $G(z)$ una funzione olomorfa in Ω tale che $G'(z) = f(z)$. Allora $D(F(z) - G(z)) = f(z) - f(z) = 0$

ciò implica che sia il gradiente di Re(F(z)-G(z)) che il gradiente di Im(F(z)-G(z)) sono nulli. Ma per l'ipotesi di connessione per il **Teorema di funzioni con gradiente nullo** si ha che sia Re(F(z)-G(z)) che Im(F(z)-G(z)) sono costanti. □

Proposizione 2.5.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Supponiamo che $f(z)$ ammetta primitive in Ω. Allora $f(z)$ è olomorfa in Ω.*

Dimostrazione. Se $F(z)$ è una primitiva di $f(z)$ allora $F(z)$ è olomorfa in Ω per definizione di primitiva, allora $F(z)$ è C^∞ e tale che $F'(z) = f(z)$, sappiamo che se $F(z)$ è olomorfa anche le sue derivate lo sono e per cui lo è anche $f(z)$. □

2.5.1 Forme differenziali associate

Teorema 2.5.2.
Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. La funzione $f(z)$ ammette primitive in Ω se e solo se

1. *$f(z)$ è continua in Ω;*
2. *le forme differenziali associate alla f, $udx - vdy$ e $vdx + udy$ sono esatte in Ω.*

Dimostrazione. Mostriamo dapprima che se f ammette primitive allora valgono la 1 e la 2. Sia $F = U + iV$ una primitiva di f in Ω. Allora f è olomorfa per la proposizione 2.5.1, e quindi continua. Dobbiamo mostrare la seconda. Facciamo vedere che U e V sono primitive delle due forme differenziali $udx - vdy$ e $vdx + udy$ rispettivamente; se ciò è vero significa che le due forme differenziali sono esatte per la definizione A.0.1. Innanzitutto notiamo che $F'(z) = f(z)$ può anche essere scritto come

$$F'(z) =^{(6)} U_x + iV_x = f(z) = u + iv,$$

da ciò si deduce che $U_x = u$ e $V_x = v$. Dunque

$$dU = U_x dx + U_y dy =^{(7)} U_x dx - V_x dy = udx - vdy,$$

questo mostra che la forma differenziale $udx - vdy$ è esatta e la sua primitiva è U. Ora mostriamo che anche V è esatta. Si ha che

$$dV = V_x dx + V_y dy =^{(8)} V_x dx + U_x dy = vdx + udy,$$

questo mostra che la forma differenziale $vdx + udy$ è esatta e la sua primitiva è V. Dobbiamo ora mostrare che se la f soddisfa la 1 e la 2 allora f ammette primitive, per cui esiste una funzione F olomorfa tale che $F'(z) = f(z)$. Siano U e V primitive delle forme $udx-vdy$ e $vdx+udy$ rispettivamente. Verifichiamo che la funzione $F = U+iV$ è una primitiva di f. Le funzioni U e V sono differenziabili perché di classe $C^1(\Omega)$ ed essendo primitive delle forme $udx-vdy$ e $vdx+udy$ rispettivamente, si ha $U_x = u$, $U_y = -v$, $V_x = v$ e $V_y = u$. Si può dunque notare che F soddisfa le condizioni di Cauchy- Riemann perché $U_x = V_y$ e $U_y = -V_x$, dunque F è olomorfa; quindi la sua derivata è $F'(z) = U_x + iV_x = u + iv = f(z)$, per cui F è una primitiva di f. □

[6]Perché F è olomorfa.

[7]Per le condizioni di Cauchy-Riemann $U_x = V_y$ e $U_y = -V_x$.

[8]Per le condizioni di Cauchy-Riemann $U_x = V_y$ e $U_y = -V_x$.

Teorema 2.5.3 (Morera)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. La funzione $f(z)$ è olomorfa in Ω se e solo se valgono entrambe le seguenti condizioni:*

1. *$f(z)$ è continua in Ω;*
2. *per ogni $z_0 \in \Omega$ esiste un disco $B_\delta(z_0) \subset \Omega$ tale che si abbia*
$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$
per ogni curva γ generalmente regolare chiusa con sostegno contenuto in $B_\delta(z_0)$.

Dimostrazione. Innanzitutto mostriamo che se f è olomorfa allora valgono sia la 1 che la 2. Se f è olomorfa allora è continua, rimane da dimostrare che vale la 2. Sia $z_0 \in \Omega$ e $B_\delta(z_0)$ un disco contenuto in Ω. Dalle condizioni di Cauchy-Riemann segue che le forme differenziali $udx - vdy$ e $vdx + udy$ sono chiuse in quanto soddisfano la definizione A.0.2 cioè $u_y = -v_x$ e $u_x = v_y$, ed essendo il cerchio $B_\delta(z_0)$ semplicemente connesso si ha che le forme differenziali sono esatte per il teorema A.0.3. Allora

$$\oint_\gamma f(z)dz = \oint_\gamma (u+iv)(dx+idy) = \oint_\gamma (udx-vdy)+i\oint_\gamma (vdx+udy) = 0$$

perché le due forme sono esatte e dunque l'integrale lungo un cammino chiuso è nullo. Ora dobbiamo mostrare che se valgono la 1 e la 2 allora f è olomorfa. Dal fatto che le circuitazioni sono nulle cioè

$$\oint_\gamma (udx - vdy) = 0$$

e

$$\oint_{\gamma}(vdx + udy) = 0$$

segue che le forme differenziali sono esatte, questo per il teorema 2.5.2 implica che f ammette primitive in $B_\delta(z_0)$ per cui la funzione è olomorfa in tale disco per la proposizione 2.5.1, e per l'arbitrarietà di z_0 è olomorfa in Ω. $\square$

2.6 Serie di potenze

Consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \tag{2.6}$$

dove $\{a_n\}$ è una successione assegnata di numeri complessi e $z_0 \in \mathbb{C}$. Questa serie viene chiamata serie di potenze di coefficienti a_n e di centro z_0.
Vorremo determinare l'insieme dei punti in cui la serie converge, tale insieme è diverso dall'insieme vuoto in quanto tale serie converge almeno per $z = z_0$.

Lemma 2.6.1 (Abel)**.** *Valgono i seguenti fatti.*

1. *Se la serie 2.6 converge in $z^* \neq z_0$, allora essa converge totalmente in $\overline{B_\delta(z_0)}$, con $\delta < |z^* - z_0|$.*

2. *Se la serie 2.6 non converge in z_*, allora essa non converge nei punti z tali che $|z - z_0| > |z_* - z_0|$.*

Dimostrazione. Dimostriamo la 1. La serie 2.6 converge in $z^* \neq z_0$, per cui la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z^* - z_0)^n$$

converge e quindi $a_n(z^* - z_0)^n$ è infinitesimo per cui esiste una costante $M > 0$ tale che $|a_n(z^* - z_0)^n| \leq M$. Allora, se $|z - z_0| \leq \delta$, si ha

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n(z^*-z_0)^n| \left|\frac{z - z_0}{z^* - z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z - z_0}{z^* - z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{\delta}{z^* - z_0}\right|^n.$$

La serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{\delta}{z^* - z_0}\right|^n$$

è una serie geometrica di ragione $\left|\frac{\delta}{z^*-z_0}\right| < 1$, per cui è convergente. Essendo la serie 2.6 maggiorata da una serie numerica convergente allora la serie è totalmente convergente.

Dimostriamo la 2. Supponiamo per assurdo che la serie converga in z' tale che $|z' - z_0| > |z_* - z_0|$. Ma se converge in z' allora per il punto 1 si dovrebbe avere che la serie converge in $\overline{B_\delta(z_0)}$, con $\delta < |z' - z_0|$, per cui la serie converge per tutti i punti $z \in \overline{B_\delta(z_0)}$ cioè tutti i punti z tali che $|z - z_0| < \delta$ allora $\delta > |z - z_0| > |z_* - z_0|$, e dunque convergerebbe in z_* contro l'ipotesi. □

Definizione 2.6.1. *Sia*

$$\rho := sup \left\{ |z - z_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad \textit{converga} \right\}$$

ρ è un numero non negativo oppure $+\infty$ e si dice raggio di convergenza della serie data.

Conoscendo il raggio di convergenza, i due seguenti risultati permettono di determinare l'insieme dei punti in cui la serie converge.

Proposizione 2.6.1. *Sia data la serie di potenze 2.6 e sia ρ il suo raggio di convergenza. Accade:*

1. *se $\rho = 0$ la serie 2.6 converge solo in z_0;*

2. *se $\rho > 0$ la serie 2.6 converge in $B_\rho(z_0)$ e diverge in $\mathbb{C}\setminus\overline{B_\rho(z_0)}$;*

3. *se $\rho = +\infty$ la serie 2.6 converge in $\mathbb{C}$.*

Teorema 2.6.1 (Abel)**.** *Sia data la serie di potenze 2.6 con raggio di convergenza $\rho > 0$. Se la serie converge in z' tale che $|z' - z_0| = \rho$ allora essa converge uniformente sul raggio che unisce il centro z_0 con il punto z'.*

Per determinare il raggio di convergenza della serie si possono utilizzare i seguenti criteri.

Teorema 2.6.2 (Criterio del rapporto)**.** *Data la serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

sia $a_n \neq 0$ per ogni n; se esiste

$$l = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

allora il raggio di convergenza ρ è dato da

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{se } l = \infty \\ \frac{1}{l} & \text{se } 0 < l < \infty \\ +\infty & \text{se } l = 0. \end{cases}$$

Teorema 2.6.3 (Criterio della radice)**.** *Data la serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

se esiste

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

allora il raggio di convergenza ρ è dato da

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{se } l = \infty \\ \frac{1}{l} & \text{se } 0 < l < \infty \\ +\infty & \text{se } l = 0. \end{cases}$$

2.6.1 Analiticità delle funzioni olomorfe

In questo paragrafo ci occuperemo delle funzioni sviluppabili in serie di potenze.

Definizione 2.6.2. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Si dice che $f(z)$ è analitica in $z_0 \in \Omega$ se esistono un disco $B_\delta(z_0) \subseteq \Omega$ ed una serie di potenze di centro z_0 tale che*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

per ogni $z \in B_\delta(z_0)$.

Si dice che la funzione è analitica in Ω se lo è in ogni suo punto.

Osservazione 2.6.1. Le serie di potenze si possono derivare termine a termine. Consideriamo una serie di potenze con raggio di convergenza $\rho > 0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

La funzione f risulta olomorfa, questo si ottiene facendo vedere che sono soddisfatte le condizioni di Cauchy-Riemann. Infatti si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} n * a_n (z - z_0)^{n-1} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Inoltre si ha:

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n * a_n (z - z_0)^{n-1}$$

con $|z - z_0| < \rho$.

Calcolando le derivate successive abbiamo:

$$f^{(k)}(z) = \frac{d^k f(z)}{dz^k} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k}$$

con $|z - z_0| < \rho$ e $k \in \mathbb{N}$.

In particolare si ha

$$f^{(k)}(z_0) = k(k-1)\cdots 1 * a_k = k! a_k$$

per cui $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

Dunque la serie si può scrivere così:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Il seguente teorema è molto importante in quanto implica che ogni funzione olomorfa è sviluppabile in serie di Taylor in un qualunque intorno di z_0 contenuto in Ω.

Teorema 2.6.4. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. $f(z)$ è analitica in Ω se e solo se è ivi olomorfa.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f(z)$ sia analitica in Ω. Quindi fissato z_0 esiste un disco $B_\delta(z_0) \subseteq \Omega$ in cui si ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Ma per l'osservazione 2.6.1 si ha che $f(z)$ è olomorfa in $B_\delta(z_0)$ e quindi in Ω .

Viceversa, sia $f(z)$ olomorfa in Ω e sia $z_0 \in \Omega$. Sia $\delta = dist(z_0, \partial\Omega)$ dove $\Omega \subset \mathbb{C}$. Per provare che la funzione $f(z)$ è analitica basta provare che è sviluppabile in serie di potenze nel disco $B_\delta(z_0)$. Fissato $z \in B_\delta(z_0)$ sia γ_ρ la circonferenza di centro z_0 e raggio ρ con $|z - z_0| < \rho < \delta$. Per la prima Formula di Cauchy si ha:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{+\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \tag{2.7}$$

Sia $\xi \in \gamma_\rho$ allora si ha che $|z - z_0| < |\xi - z_0|$ e dunque

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\xi - z_0} \right)^{n+1} (z - z_0)^n.$$

Quest'ultima serie è totalmente convergente sulla circonferenza γ_ρ, in quanto $|z - z_0| < |\xi - z_0|$. Sostituendo la serie in 2.7 si ottiene:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{+\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{+\gamma_\rho} \left(\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right) d\xi (z - z_0)^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n;$$

dove

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{+\gamma_\rho}\left(\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\right)d\xi.$$

□

Teorema 2.6.5 (Hermite-Liouville)**.** *Sia $f(z)$ una funzione intera. Supponiamo che esistano due numeri positivi R, L e un numero non negativo ν tali che*

$|f(z)| \leq L|z|^\nu,$ *per* $|z| > R.$

Allora $f(z)$ è un polinomio di grado $[\nu]$ al più.

Dimostrazione. Essendo $f(z)$ intera per cui olomorfa in $\mathbb{C}$ quindi per il teorema 2.6.4 è analitica e quindi sviluppabile in serie di MacLaurin in $\mathbb{C}$, cioè

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

ed i coefficienti a_n sono dati da

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{+\gamma_r}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi,$$

dove γ_r è una qualunque circonferenza di centro 0 e raggio $r > R$. Applicando il lemma di Darboux si ha

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{+\gamma_r}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi\right| \leq \frac{2\pi r}{2\pi}\max_{\gamma_r}\frac{|f(z)|}{r^{n+1}} = \max_{\gamma_r}\frac{r * |f(z)|}{r^{n+1}} =$$
$$= \max_{\gamma_r}\frac{|f(z)|}{r^n} \leq L\frac{r^\nu}{r^n} = Lr^{\nu - n}.$$

Se $n > [\nu]$ allora $\nu - n < 0$ e considerando il limite per $r \to +\infty$ dell'ultima diseguaglianza si ha $a_n \to 0$ e quindi la tesi perché si annullano tutti gli a_n con $n > [\nu]$ e dunque è un polinomio di grado al più $[\nu]$. $\square$

Teorema 2.6.6 (Teorema fondamentale dell'algebra). *Sia $P(z)$ un polinomio di grado $n \geq 1$. Allora l'equazione $P(z) = 0$ ha almeno una soluzione in $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $P(z) \neq 0$ in $\mathbb{C}$ e consideriamo la funzione $\frac{1}{P(z)}$, essa è intera. Essendo poi

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{P(z)} = 0,$$

la funzione $\frac{1}{P(z)}$ è limitata in $\mathbb{C}$, cioè esiste una costante $L > 0$ tale che $|\frac{1}{P(z)}| \leq L$, per il teorema di Hermite-Liouville la funzione $\frac{1}{P(z)}$ e, quindi, $P(z)$ dovrebbe essere costante, il che è assurdo per un polinomio di grado $n \geq 1$. $\square$

2.7 Serie di Laurent

Definizione 2.7.1. *Sia $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. Si definisce corona circolare di centro z_0 e raggio interno R_1 e raggio esterno R_2 l'insieme*

$$C_{R_1,R_2} = \left\{ \ z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2 \ \right\}.$$

In particolare si ha che anche un intorno bucato di centro z_0 e di raggio R è una corona circolare di centro z_0 e di raggio interno 0 e raggio esterno R.

Definizione 2.7.2. *Sia* $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$ *una serie bilatera di numeri complessi. Diciamo che la serie bilatera*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$$

converge quando le due serie

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

sono convergenti e poniamo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Teorema 2.7.1 (Laurent)**.** *Sia*

$$C_{R_1,R_2} = \left\{ \ z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2 \ \right\}$$

e $f(z)$ *una funzione olomorfa in* C_{R_1,R_2}. *Allora esistono e sono unici* $a_n \in \mathbb{C}$ *tali che :*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{2.8}$$

per ogni $z \in C_{R_1,R_2}$ *dove*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{+\gamma_\rho} \left(\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right) d\xi$$

dove $n \in \mathbb{Z}$ *e* γ_ρ *è la circonferenza di centro* z_0 *e raggio* ρ*, con* $R_1 < \rho < R_2$.

Dimostrazione. Sia $z \in C_{R_1,R_2}$ ed r, R tali che $R_1 < r < |z - z_0| < < R < R_2$. Denotiamo con γ_r, γ_R le circonferenze di centro z_0 e raggi r, R rispettivamente. Applichiamo **la formula di Cauchy** e otteniamo:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{+\gamma_R} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - z} \right) d\xi - \frac{1}{2i\pi} \int_{+\gamma_r} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - z} \right) d\xi. \tag{2.9}$$

Per il primo integrale di 2.9 si può utilizzare lo stesso procedimento utilizzato nel teorema 2.6.4. Per cui si ha

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{+\gamma_R} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - z} \right) d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{+\gamma_R} \left(\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right) d\xi$ con $n \in \mathbb{N}$.
Ora consideriamo il secondo integrale di 2.9. Sia $\xi \in \gamma_r$ si ha
$|\xi - z_0| < |z - z_0|$ e per cui

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - z_0} \right)^{k+1} (\xi - z_0)^k. \end{aligned}$$

Per cui si ha

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2i\pi} \int_{+\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{+\gamma_r} f(\xi)(\xi - z_0)^k d\xi \left(\frac{1}{z - z_0} \right)^{k+1} = \\ &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=-\infty}^{-1} \int_{+\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi (z - z_0)^n = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

con

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{+\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

dove $n \leq 0$. Abbiamo così trovato i coefficienti della serie di Laurent, ora occorre dimostrare che sono unici.
Se

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{2.10}$$

allora le due serie

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$$

e

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

sono convergenti. Consideriamo la circonferenza γ_ρ di centro z_0 e raggio ρ con $R_1 < \rho < R_2$. Si ha

$$\int_{+\gamma_\rho} \frac{g(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \int_{+\gamma_\rho} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-k-1} dz.$$

Abbiamo detto che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

è convergente e tale serie di potenze ha raggio di convergenza maggiore o uguale a R_2, per cui converge uniformente sulla circonferenza γ_ρ perché è un compatto contenuto nella corona circolare. Poi essendo $(z-z_0)^{-k-1}$ limitata su γ_ρ si ha che anche

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-k-1}$$

è una serie uniformente convergente per cui si può integrare termine a termine e si ottiene

$$\int_{+\gamma_\rho} \frac{g(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{+\gamma_\rho} (z-z_0)^{n-k-1} dz.$$

Se invece consideriamo

$$\int_{+\gamma_\rho} \frac{h(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$

si ottiene

$$\int_{+\gamma_\rho} \frac{h(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \int_{+\gamma_\rho} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^{n-k-1} dz$$

anche tale serie è uniformente convergente su γ_ρ, in quanto se poniamo $z = z_0 + \frac{1}{w}$ si ottiene

$$h(z) = h\left(z_0 + \frac{1}{w}\right) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \left(\left(z_0 + \frac{1}{w}\right) - z_0\right)^n =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \left(\frac{1}{w}\right)^n = \sum_{p=1}^{\infty} a_{-p} w^p$$

se $R_1 < |z - z_0| < R_2$ allora $R_2^{-1} < |w| < R_1^{-1}$. Quest'ultima è una serie di potenze che ha raggio di convergenza maggiore o uguale a R_1^{-1} e quindi converge uniformente sulla circonferenza di centro 0 e di raggio ρ^{-1} [9] e quindi avendo fatto tale sostituzione anche la serie iniziale è convergente, e dunque è uniformemente convergente anche la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k-1} dz$$

e possiamo integrare termine a termine. Si ha

$$\int_{+\gamma_\rho} \frac{h(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \int_{+\gamma_\rho} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^{n-k-1} dz =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \int_{+\gamma_\rho} (z-z_0)^{n-k-1} dz.$$

[9] $R_1 < \rho$ dunque $\rho^{-1} < R_1^{-1}$.

Infine

$$\int_{+\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{+\gamma_\rho} (z-z_0)^{n-k-1}dz = {}^{(10)} a_k 2i\pi.$$

□

2.8 Zeri di una funzione olomorfa

Definizione 2.8.1. *Siano* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *un aperto ed* $f(z)$ *una funzione olomorfa in* Ω. $z_0 \in \Omega$ *si dice zero di ordine* m, $m \in \mathbb{N}$, *se esiste una funzione* $g(z)$ *olomorfa in* Ω *tale che* $f(z) = g(z)(z-z_0)^m$ *in* Ω *e* $g(z_0) \neq 0$.

Gli zeri di un qualche ordine finito si diranno zeri di ordine finito. Gli zeri che non sono d'ordine finito si dicono zeri d'ordine infinito.

10

$$\int_{+\gamma_\rho} (z-z_0)^{n-k-1}dz = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq k \\ 2i\pi & \text{se } n = k \end{cases}$$

Teorema 2.8.1. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto ed $f(z)$ una funzione olomorfa in Ω. Le due condizioni sono equivalenti:*

1. *z_0 è uno zero di ordine m;*

2. *$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.*

Dimostrazione. Proviamo dapprima che la 1 implica la 2. Sia z_0 uno zero di ordine m; allora esiste una funzione $g(z)$ olomorfa in Ω tale che $f(z) = g(z)(z - z_0)^m$ in Ω e $g(z_0) \neq 0$. Consideriamo il disco $B_r(z_0) \subseteq \Omega$. Siccome sia $f(z)$ che $g(z)$ sono olomorfe, quindi sviluppabili in serie di Taylor in questo disco, si ha:

$$f(z) = g(z)(z - z_0)^m = (z - z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+m} =$$
$$= \sum_{p=m}^{\infty} \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} (z - z_0)^p.$$

Eguagliando dunque gli ultimi due membri si deve avere che
$f^{(j)}(z_0) = 0$ per $j = 0, \cdots, m - 1$ e
$f^{(m)}(z_0) =^{(11)} m! a_0 =^{(12)} m! g(z_0) \neq 0$.
Viceversa proviamo che la 2 implica la 1.
Poniamo

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} & \text{in } \Omega \setminus \{z_0\} \\ \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} & \text{in } z_0. \end{cases}$$

[11] Perché il termine di grado m nel penultimo membro è a_0 e nell'ultimo membro invece è $\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$.

[12]
$$g(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_0 - z_0)^k = a_0$$

Dalla prima deduciamo che $f(z) = g(z)(z - z_0)^m$ in $\Omega \setminus \{z_0\}$ e dalla seconda che $g(z_0) \neq 0$, rimane da dimostrare che $g(z)$ è olomorfa in z_0, perché in $\Omega \setminus \{z_0\}$ è olomorfa in quanto rapporto di due funzioni olomorfe. Consideriamo nel disco $B_r(z_0) \subseteq \Omega$ lo sviluppo in serie di Taylor di $f(z)$ che si può considerare perché $f(z)$ è olomorfa:

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-m}.$$

Si vede che la serie di potenze

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-m} \tag{2.11}$$

ha raggio di convergenza maggiore o uguale a r in quanto $f(z)$ è definita in $B_r(z_0)$ per cui anche la serie 2.11 è definita in tale disco e la sua somma è una funzione olomorfa. Siccome in $B_r(z_0)$ si ha

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-m}$$

allora $g(z)$ è olomorfa in z_0. $\square$

Possiamo notare che un teorema analogo a quest'ultimo vale anche per gli zeri di un polinomio.
Indichiamo con Z_f l'insieme degli zeri di f.

Definizione 2.8.2. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto ed $f(z)$ una funzione olomorfa in Ω. $z_0 \in \Omega$ si dice zero isolato se è un punto isolato per l'insieme Z_f.*

Teorema 2.8.2. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto ed $f(z)$ una funzione olomorfa in Ω. Le due condizioni sono equivalenti:*

1. *z_0 è uno zero di ordine finito;*

2. *z_0 è uno zero isolato.*

Dimostrazione. Dapprima mostriamo che la 1 implica la 2. Sia z_0 uno zero di ordine m; allora esiste una funzione $g(z)$ olomorfa in Ω tale che $f(z) = g(z)(z - z_0)^m$ in Ω e $g(z_0) \neq 0$. Per il teorema di permanenza del segno applicato alla funzione $|g(z)|$ esiste un intorno di z_0 in cui la $g(z)$ è diverso da zero e dunque z_0 è uno zero isolato per $f(z)$.
Viceversa mostriamo per assurdo che la 2 implica la 1.
Sia z_0 uno zero d'ordine infinito, per il teorema 2.8.1 si deve avere $f^{(n)}(z_0) = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sviluppando la funzione in serie di Taylor si trova che in un intorno di z_0 la funzione è identicamente nulla in quanto i coefficienti della serie $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ sono nulli, contrariamente all'ipotesi che z_0 è uno zero isolato, per cui è uno zero d'ordine finito. □

Conseguenza della nozione di zero di una funzione olomorfa è il seguente teorema.

Teorema 2.8.3 (Principio di identità delle funzioni olomorfe)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso e siano $f(z), g(z)$ due funzioni olomorfe in Ω. Supponiamo che l'insieme dei punti in cui le due funzioni coincidono ha un punto di accumulazione appartenente ad Ω. Allora $f(z) = g(z)$ in Ω.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $h(z) = f(z) - g(z)$ essa è olomorfa in Ω perché differenza di due funzioni olomorfe, l'insieme Z_h ha un punto di accumulazione z_0 appartenente a Ω in quanto si ha che Z_h è l'insieme su cui le due funzioni coincidono e per ipotesi l'insieme dei punti in cui le due funzioni coincidono ha un punto di accumulazione appartenente ad Ω. Sia $\{z_n\}$ una succesione di punti di Z_h convergente a z_0. Essendo $h(z)$ olomorfa essa è continua per cui si ha

$$\lim_{n\to\infty} h(z_n) = h(z_0)$$

dunque $h(z_0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per cui z_0 non è un punto isolato per $h(z)$.
Sia

$$\Omega_1 = \left\{ \ z \in \Omega : \ \ \text{z è uno zero d'ordine infinito per h(z)} \ \right\}$$

e $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$. I due insiemi così definiti sono aperti, ciò si può vedere ragionando come segue. Sia $z^* \in \Omega_1$, per il teorema 2.8.2 esiste tutto un intorno di z^* in cui la funzione $h(z)$ è identicamente nulla questo perché z^* non è isolato e dunque z^* è interno a Ω_1. Sia $z_* \in \Omega_2$, allora o $h(z_*) \neq 0$ oppure z_* è uno zero isolato per $h(z)$, in entrambi i casi è possibile trovare un suo intorno interamente contenuto in Ω_2. Dalla ipotesi di connessione segue che uno dei due insiemi Ω_1,Ω_2 deve essere vuoto ed essendo $z_0 \in \Omega_1$, perché non è un punto isolato quindi è uno zero d'ordine infinito, si deve avere $\Omega_2 = \emptyset$ e dunque $\Omega_1 = \Omega$. $\square$

Definizione 2.8.3. *Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f(z)$ una funzione olomorfa in Ω. I punti della frontiera $\partial\Omega$ si chiamano punti di singolarità o punti singolari della funzione $f(z)$. Un punto singolare z_0 si dirà una singolarità isolata se esiste un intorno bucato $B_r^*(z_0)$ tale che $B_r^*(z_0) \cap \partial\Omega = \emptyset$.*

Se $f(z)$ è una funzione olomorfa in Ω e z_0 è una singolarità isolata allora è possibile determinare un disco bucato dove la funzione è sviluppabile in serie di Laurent.
Ora diamo le seguenti definizioni che saranno molto utili nel seguito.

Definizione 2.8.4. *Il punto z_0 è detto una singolarità eliminabile o fittizia se nella serie di Laurent 2.10 $a_n = 0$ per ogni $n < 0$.*

Dalla precedente definizione possiamo dedurre che se z_0 è una singolarità eliminabile allora la serie di Laurent assume la seguente forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Definizione 2.8.5. *Il punto z_0 è detto polo di ordine m, dove m è un intero positivo, se $a_{-m} \neq 0$ e se nella serie di Laurent 2.10 $a_n = 0$ per ogni $n < -m$.*

Dalla precedente definizione si può dunque affermare che se z_0 è un polo di ordine m allora la serie di Laurent si scrive nel seguente modo

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots =$$
$$= \frac{a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + a_0(z - z_0)^m + a_1(z - z_0)^{m-1} + \cdots}{(z - z_0)^m}$$

e inoltre esiste una funzione $g(z)$ olomorfa tale che $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ con $g(z) = a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+a_0(z-z_0)^m+a_1(z-z_0)^{m-1}+\cdots$ e tale che $g(z_0) = a_{-m} \neq 0$.

Definizione 2.8.6. *Il punto z_0 è detto singolarità essenziale se esistono infiniti valori dell'indice $n < 0$ tali che $a_n \neq 0$.*

I teoremi che seguono servono a classificare il tipo di singolarità senza l'utilizzo dello sviluppo in serie di Laurent delle funzioni.

Teorema 2.8.4. *Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f(z)$ una funzione olomorfa in Ω. Sia z_0 una singolarità isolata. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *z_0 è una singolarità eliminabile per $f(z)$;*
2. *la funzione $f(z)$ è convergente al tendere di z a z_0;*
3. *esistono un disco bucato $B_r^*(z_0) \subseteq \Omega$ ed un numero $L > 0$ tali che $|f(z)| \leq L$ in $B_r^*(z_0)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che la 1 implica la 2. z_0 è una singolarità eliminabile per $f(z)$ per cui esiste un disco bucato $B_R^*(z_0) \subseteq \Omega$ nel quale la funzione $f(z)$ è sviluppabile in serie di Laurent ed essendo una singolarità eliminabile $a_n = 0$ per ogni $n < 0$ allora la serie è:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Questa è una serie di potenze che ha raggio di convergenza maggiore o uguale a R e detta $\varphi(z)$ la sua somma si ha $f(z) = \varphi(z)$ per

$0 < |z - z_0| < R$.

Ne segue che essendo $f(z)$ olomorfa anche $\varphi(z)$ è olomorfa e quindi continua per cui si ha la seguente:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0) = {}^{(13)} a_0.$$

Mostriamo che la 3 implica la 1. Consideriamo il disco bucato $B_r^*(z_0)$ e lo sviluppo in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{con } 0 < |z - z_0| < r.$$

Per provare che z_0 è una singolarità eliminabile per $f(z)$ bisogna provare che $a_n = 0$ per ogni $n < 0$.

Si ha $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{+\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$ dove γ_ρ è una circonferenza di centro z_0 e raggio $\rho < r$. Applicando il lemma di Darboux si ha

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{+\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{2\pi\rho}{2\pi\rho^{n+1}} \max_{\gamma_\rho} |f| \leq L\rho^{-n}.$$

Passando al limite per $\rho \to 0$ si ottiene che gli a_n sono tutti nulli per $n < 0$. $\square$

---

[13]

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots, \quad \text{per cui } f(z_0) = a_0.$$

Teorema 2.8.5. *Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f(z)$ una funzione olomorfa in Ω. Sia z_0 una singolarità isolata. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *z_0 è un polo di un qualche ordine per $f(z)$;*
2. *esiste un intero positivo m tale che la funzione $(z-z_0)^m f(z)$ è convergente ad un numero diverso da zero al tendere di z a z_0;*
3. *la funzione $f(z)$ diverge al tendere di z a z_0.*

Dimostrazione. Mostriamo che la 1 implica la 2. Sia z_0 un polo d'ordine m per $f(z)$ e sia $B_r^*(z_0) \subseteq \Omega$.
La serie di Laurent la possiamo scrivere nel seguente modo

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

con $0 < |z-z_0| < r$, con $a_{-m} \neq 0$. Abbiamo che

$$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m} (z-z_0)^k,$$

passando quindi al limite per $z \to z_0$ si ottiene:

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z) = \lim_{z \to z_0} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m} (z-z_0)^k =$$
$$= \lim_{z \to z_0} a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \cdots = a_{-m} \neq 0.$$

Mostriamo che la 2 implica la 3. Dobbiamo far vedere che la funzione $f(z)$ diverge al tendere di z a z_0. Allora

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} = \infty.$$

Mostriamo che la 3 implica la 1. Sia $B_R^*(z_0)$ un intorno bucato contenuto in Ω in cui $f(z) \neq 0$. Posto

$$F(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{in } B_R^*(z_0) \\ 0 & \text{in } z_0 \end{cases}$$

La funzione $F(z)$ è olomorfa e ha in z_0 uno zero isolato per cui per il teorema 2.8.2 esso è uno zero d'ordine finito. Pertanto esistono un intero p e una funzione olomorfa $g(z)$ tali che $F(z) = g(z)(z-z_0)^p$ con $g(z_0) \neq 0$. Quindi nel disco bucato abbiamo

$$f(z) = \frac{1}{F(z)} = \frac{1}{g(z)(z-z_0)^p}.$$

Siccome sia $f(z)$ che $\frac{1}{g(z)}$ sono olomorfe e per cui sviluppabili in serie di potenze si ha

$$f(z) = \frac{1}{g(z)(z-z_0)^p} = \frac{1}{(z-z_0)^p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-p} = \sum_{k=-p}^{\infty} a_{k+p} (z-z_0)^k$$

questo significa che z_0 è un polo d'ordine p in quanto il coefficiente di $(z-z_0)^{-p}$ che è a_0 è diverso da zero poiché $a_0 = \frac{1}{g(z_0)}$ e i coefficienti di $(z-z_0)^k$ con $k < -p$ sono tutti nulli. $\square$

Del seguente teorema non viene data la dimostrazione.

Teorema 2.8.6. *Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f(z)$ una funzione olomorfa in Ω. Sia z_0 una singolarità isolata. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *z_0 è una singolarità essenziale per $f(z)$;*
2. *non esiste né finito né infinito il limite della funzione $f(z)$ al tendere di z a z_0.*

Grazie a questi tre teoremi la classificazione della singolarità si può fare calcolando semplicemente il limite di $f(z)$ al tendere di z a z_0.

Si può inoltre notare che se z_0 è uno zero d'ordine n per $f(z)$ allora z_0 è un polo d'ordine n per $\frac{1}{f(z)}$. Infatti se z_0 è uno zero d'ordine n per $f(z)$ allora $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$ dove $\varphi(z)$ è una funzione olomorfa tale che $\varphi(z_0) \neq 0$. Bisogna innanzittutto mostrare che z_0 è un polo per $\frac{1}{f(z)}$, perciò basta calcolare

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)},$$

ma questo diverge perché z_0 è uno zero per $f(z)$ e quindi abbiamo verificato che è un polo per il teorema 2.8.5; basta ora far vedere che

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n \frac{1}{f(z)}$$

converge per far vedere che z_0 è un polo d'ordine n per $\frac{1}{f(z)}$. Si ha

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n \frac{1}{(z - z_0)^n \varphi(z)} = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq \infty.$$

Osservazione 2.8.1. E' interessante notare che si può estendere la regola di de l'Hopital alle funzioni complesse utilizzando semplicemente la nozione di zero e di polo di una funzione.
Occupiamoci della forma indeterminata $\frac{0}{0}$.
Siano $f(z)$ e $g(z)$ due funzioni olomorfe in Ω e sia z_0 uno zero per entrambe le funzioni rispettivamente d'ordine m e p, facciamo vedere che

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Consideriamo un intorno bucato di z_0 in esso si ha che
$f(z) = (z-z_0)^m\varphi(z)$ e $g(z) = (z-z_0)^p\psi(z)$, dove $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ sono funzioni olomorfe e tali che $\varphi(z_0) \neq 0$ e $\psi(z_0) \neq 0$.
Allora

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z-z_0)^m\varphi(z)}{(z-z_0)^p\psi(z)} = (z-z_0)^{m-p}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \tag{2.12}$$

calcolando il limite si ha

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} 0 & \text{se } m > p \\ \frac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)} & \text{se } m = p \\ \infty & \text{se } m < p. \end{cases}$$

Calcoliamo ora $\frac{f'(z)}{g'(z)}$, utilizzando l'uguaglianza 2.12.
Si ha

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{g'(z)} &= \frac{m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z) + (z-z_0)^m\varphi'(z)}{p(z-z_0)^{p-1}\psi(z) + (z-z_0)^p\psi'(z)} = \\ &= \frac{(z-z_0)^{m-1}(m\varphi(z) + (z-z_0)\varphi'(z))}{(z-z_0)^{p-1}(p\psi(z) + (z-z_0)\psi'(z))} = \\ &= (z-z_0)^{m-p}\frac{(m\varphi(z) + (z-z_0)\varphi'(z))}{(p\psi(z) + (z-z_0)\psi'(z))},\end{aligned}$$

per cui calcolando il limite si trova

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}=\begin{cases}0 & \text{se } m>p\\ \frac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)} & \text{se } m=p\\ \infty & \text{se } m<p.\end{cases}$$

Possiamo fare lo stesso per la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Siano $f(z)$ e $g(z)$ due funzioni olomorfe in Ω e sia z_0 uno polo per entrambe le funzioni rispettivamente d'ordine m e p, facciamo vedere che

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Consideriamo un intorno bucato di z_0 in esso si ha che $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ e $g(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^p}$, dove $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ sono funzioni olomorfe e tali che $\varphi(z_0)\neq 0$ e $\psi(z_0)\neq 0$.
Allora

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-z_0)^{p-m}=\frac{\varphi(z)(z-z_0)^p}{\psi(z)(z-z_0)^m}, \tag{2.13}$$

calcolando il limite si ha

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\begin{cases}0 & \text{se } m<p\\ \frac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)} & \text{se } m=p\\ \infty & \text{se } m>p.\end{cases}$$

Calcoliamo ora $\frac{f'(z)}{g'(z)}$, utilizzando l'uguaglianza 2.13.
Si ha

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{g'(z)}&=\frac{\varphi'(z)(z-z_0)^p+p\varphi(z)(z-z_0)^{p-1}}{\psi'(z)(z-z_0)^m+m\psi(z)(z-z_0)^{m-1}}=\\ &=(z-z_0)^{p-m}\frac{(z-z_0)\varphi'(z)+p\varphi(z)}{(z-z_0)\psi'(z)+m\psi(z)},\end{aligned}$$

per cui calcolando il limite si trova

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \begin{cases} 0 & \text{se } m < p \\ \frac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)} & \text{se } m = p \\ \infty & \text{se } m > p. \end{cases}$$

Concludiamo il capitolo con due risultati fondamentali.
Del seguente teorema omettiamo la dimostrazione.

Teorema 2.8.7 (Picard)**.** *Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f(z)$ una funzione olomorfa in Ω. Sia z_0 una singolarità essenziale per $f(z)$. Poniamo $A_\delta = \Omega \cap B^*_\delta(z_0)$. Allora esiste al più un numero complesso λ tale che $f(A_\delta) = \mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$ qualunque $\delta > 0$.*

Il seguente teorema è una versione più debole del precedente.

Teorema 2.8.8 (Casorati)**.** *Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f(z)$ una funzione olomorfa in Ω. Sia z_0 una singolarità essenziale per $f(z)$. Poniamo $A_\delta = \Omega \cap B^*_\delta(z_0)$. Allora la chiusura di $f(A_\delta)$ è $\mathbb{C}$ qualunque $\delta > 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un $\delta^* > 0$ ed un numero complesso α tale che non appartenga a $f(A_{\delta^*})$ e non sia di accumulazione per esso. Esisterà allora un numero $r > 0$ tale che $|f(z) - \alpha| \geq r$ per ogni $z \in B^*_{\delta^*}(z_0)$.
Si ha $\frac{1}{|f(z)-\alpha|} \leq \frac{1}{r}$. Allora per il teorema 2.8.4 il punto z_0 è una singolarità eliminabile per $(f(z) - \alpha)^{-1}$ e si ha

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z) - \alpha} = l$$

e da questa si deduce che

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \begin{cases} \alpha + \frac{1}{l} & \text{se } l \neq 0 \\ \infty & \text{se } l = 0 \end{cases}$$

contrariamente al fatto che z_0 è una singolarità essenziale. $\square$

Capitolo 3

Il teorema dei residui

Definizione 3.0.7. *Data la serie di Laurent 2.10, sia z_0 un punto singolare isolato, il coefficiente a_{-1} è detto residuo della funzione $f(z)$ nel punto singolare z_0, e viene indicato con il simbolo $Res(f(z); z_0)$.*

Per il teorema di Laurent 2.7.1 si ha che

$$Res(f(z); z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{+\gamma} f(z)dz \tag{3.1}$$

dove γ è una qualunque circonferenza di centro z_0 contenuta nel disco bucato $B_r^*(z_0)$.
Il seguente teorema è utile per calcolare il residuo della funzione $f(z)$ nel punto singolare z_0, se z_0 è un polo d'ordine finito.

Proposizione 3.0.1. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto e $f(z)$ una funzione olomorfa in Ω. Sia z_0 un polo d'ordine $n \in \mathbb{N}$ per $f(z)$. Allora*

$$Res(f(z); z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} D^{(n-1)}[(z - z_0)^n f(z)].$$

Dimostrazione. Se z_0 è un polo d'ordine n allora nell'intorno bucato $B_r^*(z_0) \subset \Omega$ lo sviluppo in serie di Laurent di $f(z)$ sarà

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{con } a_{-n} \neq 0.$$

Consideriamo quindi la funzione

$$\varphi(z) = \begin{cases} f(z)(z - z_0)^n & \text{in } B_r^*(z_0) \\ 0 & \text{in } z_0 \end{cases}$$

nel disco bucato $B_r^*(z_0)$ si ha quindi

$$\varphi(z) = f(z)(z-z_0)^n = (z-z_0)^n \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-z_0)^{n+k},$$

dunque $\varphi(z)$ è la somma di questa serie di potenze, per cui si ha

$$\sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^{n+k} = \sum_{p=0}^{\infty} a_{p-n} (z - z_0)^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(p)}(z_0)}{p!} (z - z_0)^p$$

da ciò si deduce che

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{\varphi^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \varphi^{(n-1)}(z) = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} D^{(n-1)}[f(z)(z - z_0)^n]. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.0.9 (Teorema dei residui). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto e $z_1, \cdots, z_n \in \Omega$. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in $\Omega \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$ e T un dominio regolare contenuto in Ω e tale che nessuno dei punti $z_1, \cdots, z_n$ appartenga alla frontiera di T. Allora*

$$\int_{+\partial T} f(z)dz = 2i\pi \sum_{z_j \in int(T)} Res(f(z); z_j).$$

Dimostrazione. I punti $z_1, \cdots, z_n$ sono singolarità isolate per $f(z)$. Siano $z_1, \cdots, z_p$ con $p \leq n$ quelli interni a T e sia

$$\delta = min\left\{ \ dist(z_j, \partial T), \tfrac{|z_j - z_k|}{2} \quad \text{con } j,k = 1, \cdots, p \text{ e } j \neq k \ \right\};$$

posto

$$T' = T \setminus \bigcup_{j=1,\cdots,p} B_\delta(z_j),$$

si ha che T' è un dominio regolare e quindi per il teorema di Cauchy-Goursat abbiamo

$$0 = \int_{+\partial T'} f(z)dz = \int_{+\partial T} f(z)dz - \sum_{j=1}^{p} \int_{+\partial B_\delta(z_j)} f(z)dz.$$

e quindi

$$\int_{+\partial T} f(z)dz = \sum_{j=1}^{p} \int_{+\partial B_\delta(z_j)} f(z)dz = \sum_{j=1}^{p} \int_{+\gamma_\delta(z_j)} f(z)dz =$$
$$= 2i\pi \sum_{z_j \in int(T)} Res(f(z); z_j).$$

□

3.1 Comportamento della funzione all'infinito

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto tale che il suo complementare sia un compatto; esisterà, quindi, un numero positivo R tale che l'insieme

$$\left\{ \ z \in \mathbb{C} : |z| > R \ \right\}$$

sia contenuto in Ω. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in Ω. La funzione $g(w) = f(\frac{1}{w})$ è definita nel disco bucato $B^*_{\frac{1}{R}}(0)$.
Sotto le precedenti considerazioni valgono le seguenti definizioni.

Definizione 3.1.1. *Diremo che il punto all'infinito è regolare per $f(z)$ se il punto $w = 0$ è una singolarità eliminabile per la funzione $g(w)$.*

Definizione 3.1.2. *Diremo che il punto all'infinito è un polo di ordine m per $f(z)$ se il punto $w = 0$ è un polo d'ordine m per la funzione $g(w)$.*

Definizione 3.1.3. *Diremo che il punto all'infinito è essenziale per $f(z)$ se il punto $w = 0$ è una singolarità essenziale per la funzione $g(w)$.*

Definizione 3.1.4. *Sia $f(z)$ olomorfa in un aperto Ω tale che il suo complementare sia un compatto e sia $R > 0$ tale che l'insieme*

$$\left\{ \ z \in \mathbb{C} : |z| > R \ \right\}$$

sia contenuto in Ω. Dato lo sviluppo in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \tag{3.2}$$

per $|z| > R$. Si definisce residuo della funzione all'infinito e si indica con $Res(f(z); \infty)$ il coefficiente $-a_{-1}$.

Per il teorema di Laurent 2.7.1 si ha che

$$Res(f(z); \infty) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{+\gamma} f(z)dz \tag{3.3}$$

dove γ è una qualunque circonferenza di centro 0 e raggio maggiore di R.

Consideriamo lo sviluppo in serie di Laurent della funzione

$g(w) = f(\frac{1}{w})$ definita nel disco bucato $B^*_{\frac{1}{R}}(0)$.
Infatti posto $z = \frac{1}{w}$ si ha

$$g(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n w^{-n}. \tag{3.4}$$

In tal modo possiamo calcolare il residuo all'infinito di $f(z)$; infatti si ha:

$$Res(f(z);\infty) = Res\left(-\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right);0\right) \tag{3.5}$$

Valgono i seguenti teoremi sui punti all'infinito di una funzione.

Teorema 3.1.1. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto tale che il suo complementare sia un compatto e sia $f(z)$ una funzione olomorfa in Ω. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *il punto all'infinito è regolare per $f(z)$;*
2. *la funzione $f(z)$ è convergente al tendere di z all'infinito;*
3. *esistono un $r > 0$ ed un numero $L > 0$ tali che $|f(z)| \leq L$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| > r$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che la 1 implica la 2. Siccome il punto all'infinito è regolare per $f(z)$ allora $w = 0$ è una singolarità eliminabile per $g(w) = f(\frac{1}{w})$ per cui la $g(w)$ è convergente al tendere di w a zero che è equivalente a dire che $g(\frac{1}{z}) = f(z)$ è convergente per z che tende all'infinito.
Dimostriamo ora che la 2 implica la 3. La funzione $f(z)$ è convergente al tendere di z all'infinito; ciò significa che $g(w)$ è convergente

al tendere di w a zero. Per cui esistono un disco bucato $B_r^*(0) \subseteq \Omega$ ed un numero $L > 0$ tali che $|g(w)| \leq L$ in $B_r^*(0)$, si ha dunque che esistono sia r che L. Occorre verificare che $|f(z)| \leq L$. Si ha che $|w| < r$ per cui $\left|\frac{1}{z}\right| < r$ e dunque $|z| > r$, poi abbiamo che $|g(w)| \leq L$ e per cui $|g(w)| = |f(\frac{1}{w})| = |f(z)| \leq L$.
Dimostriamo quindi che la 3 implica la 1. Se esistono un $r > 0$ ed un numero $L > 0$ tali che $|f(z)| \leq L$, per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| > r$, allora esistono un disco bucato $B_r^*(0) \subseteq \Omega$ ed un numero $L > 0$ tali che $|g(w)| \leq L$ in $B_r^*(0)$ e per cui $w = 0$ è una singolarità eliminabile per $g(w)$ allora il punto all'infinito è regolare per $f(z)$ per la definizione 3.1.1. $\square$

Teorema 3.1.2. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto tale che il suo complementare sia un compatto e sia $f(z)$ una funzione olomorfa in Ω. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *il punto all'infinito è un polo di un qualche ordine per $f(z)$;*
2. *esiste un intero positivo m tale che la funzione $\frac{f(z)}{z^m}$ è convergente ad un numero diverso da zero al tendere di z all'infinito;*
3. *la funzione $f(z)$ diverge al tendere di z all'infinito.*

Dimostrazione. Dimostriamo che la 1 implica la 2. Se il punto all'infinito è un polo d'ordine m per $f(z)$ allora il punto $w = 0$ è un polo d'ordine m per la funzione $g(w)$, per cui esiste un intero positivo m tale che la funzione $w^m g(w)$ è convergente ad un numero diverso da zero al tendere di w a 0 ciò equivale a dire che la funzione $w^m g(w) = w^m f(\frac{1}{w}) = z^{-m} f(z)$ converge, per z che tende

all'infinito.
Dimostriamo ora che la 2 implica la 3. Se esiste un intero positivo m tale che la funzione $\frac{f(z)}{z^m}$ è convergente ad un numero diverso da zero al tendere di z all'infinito, allora $w^m g(w)$ converge per w che tende a zero equivalentemente per il teorema 2.8.5 si ha che $g(w)$ diverge per w che tende a zero, per cui la funzione $f(z)$ diverge al tendere di z all'infinito.
Infine dimostriamo che la 3 implica la 1. Se la funzione $f(z)$ diverge al tendere di z all'infinito allora $g(w)$ diverge per w che tende a zero e per cui w è un polo d' ordine finito per $g(w)$, e quindi per la definizione 3.1.2 il punto all'infinito è un polo d'ordine finito. $\square$

Del seguente teorema non diamo la dimostrazione.

Teorema 3.1.3. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto tale che il suo complementare sia un compatto e sia $f(z)$ una funzione olomorfa in Ω. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *il punto all'infinito è essenziale per $f(z)$;*

2. *non esiste né finito né infinito il limite della funzione $f(z)$ al tendere di z all'infinito.*

Teorema 3.1.4. *Siano $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ ed $f(z)$ una funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$. Si ha*

$$\sum_{j=1}^{n} Res(f(z); z_j) + Res(f(z); \infty) = 0.$$

Dimostrazione. Sia γ_R la circonferenza centrata nell'origine e di raggio $R > max\{|z_1|, |z_2|, \cdots, |z_n|\}$. Applicando il teorema dei residui si ottiene

$$\int_{+\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi \sum_{j=1}^{n} Res(f(z); z_j).$$

Ora occorre calcolare il residuo di $f(z)$ in ∞, ma la funzione è definita in

$$\left\{ \; z \in \mathbb{C} : |z| > max\{|z_1|, |z_2|, \cdots, |z_n|\} \; \right\}$$

e siccome $Res(f(z); \infty) = -a_{-1} = -\frac{1}{2i\pi} \int_{+\gamma_R} f(z)dz$,
cioè $-2i\pi Res(f(z); \infty) = \int_{+\gamma_R} f(z)dz$, si ottiene

$$2i\pi \sum_{j=1}^{n} Res(f(z); z_j) = -2i\pi Res(f(z); \infty)$$

e quindi

$$\sum_{j=1}^{n} Res(f(z); z_j) + Res(f(z); \infty) = 0.$$

□

Il precedente teorema e il teorema dei residui sono utili per calcolare integrali. Vediamo un esempio.

Esempio 3.1.1. Calcoliamo il seguente integrale $\int_{+\partial T} e^{\frac{1}{z^2 - iz}}$, dove

$$T = \left\{ \; z \in \mathbb{C} : |Re(z)| \leq 2, |Im(z)| \leq 2 \; \right\}.$$

La funzione integranda possiede due poli, uno per z=0 e l'altro per z=i, i quali sono contenuti in T ma non appartengono alla frontiera di T, allora per il teorema dei residui si ha

$$\int_{+\partial T} e^{\frac{1}{z^2 - iz}} dz = 2i\pi \left(Res\left(e^{\frac{1}{z^2 - iz}}; 0 \right) + Res\left(e^{\frac{1}{z^2 - iz}}; i \right) \right)$$

e per il teorema 3.1.4 si ha

$$Res\left(e^{\frac{1}{z^2-iz}};0\right)+Res\left(e^{\frac{1}{z^2-iz}};i\right)+Res\left(e^{\frac{1}{z^2-iz}};\infty\right)=0.$$

Allora basta calcolare il residuo all'infinito e cambiarlo di segno e moltiplicarlo per $2i\pi$. Siccome $Res\left(e^{\frac{1}{z^2-iz}};\infty\right)=Res\left(-\frac{1}{w^2}e^{\frac{w^2}{1-iw}};0\right)$ e 0 è un polo d'ordine due [1] per $\frac{-1}{w^2}e^{\frac{w^2}{1-iw}}$ possiamo utilizzare il teorema 3.0.1 per calcolarlo. Per cui

$$Res\left(-\frac{1}{w^2}e^{\frac{w^2}{1-iw}};0\right)=\lim_{w\to 0}\frac{1}{(2-1)!}D^{(2-1)}\left[(w)^2\frac{-1}{w^2}e^{\frac{w^2}{1-iw}}\right]=$$

$$=\lim_{w\to 0}D\left[-e^{\frac{w^2}{1-iw}}\right]=$$

$$=-\lim_{w\to 0}e^{\frac{w^2}{1-iw}}\frac{2w(1-iw)+iw^2}{(1-iw)^2}=0.$$

Per cui

$$\int_{+\partial T}e^{\frac{1}{z^2-iz}}=0.$$

3.2 Applicazioni del Teorema dei residui

Il teorema dei residui è molto importante in quanto consente la risoluzione di alcuni tipi di integrali, difficili da risolvere con tecniche di variabile reale. Considereremo in questo paragrafo i due

[1] In quanto

$$\lim_{w\to 0}w^2\frac{-1}{w^2}e^{\frac{w^2}{1-iw}}=-1.$$

seguenti tipi di integrali: gli integrali di funzioni di una variabile reale composte mediante funzioni trigonometriche e gli integrali estesi a $\mathbb{R}$.

3.2.1 Integrali di funzioni di una variabile reale composte mediante funzioni trigonometriche

Il teorema dei residui permette di calcolare il seguente tipo di integrale:

$$\int_0^{2\pi} F(\sin(t), \cos(t))dt \tag{3.6}$$

dove la funzione integranda è una funzione continua nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Ricordiamo le definizioni del seno e del coseno complessi:
$\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$
$\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.
Sostituiamo ora queste definizioni in 3.6 e si ottiene:

$$\int_0^{2\pi} F(\sin(t), \cos(t))dt = \int_0^{2\pi} F\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}, \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) dt. \tag{3.7}$$

Operiamo ora la seguente sostituzione: $z = e^{it}$ per cui si ha
$dz = ie^{it}dt$; sostituiamo nel secondo membro di 3.7:

$$\int_0^{2\pi} F\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}, \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) dt = \int_{+\gamma} F\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}, \frac{z+z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz}$$

dove γ è la circonferenza di centro 0 e raggio 1.
In definitiva abbiamo così ottenuto:

$$\int_0^{2\pi} F(\sin(t), \cos(t))dt = \int_{+\gamma} F\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}, \frac{z+z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz}.$$

L'integrale che compare al secondo membro è un integrale curvilineo, il quale si può risolvere con il teorema dei residui.
Vogliamo calcolare tramite questo metodo il seguente integrale.

Esempio 3.2.1. Sia $m \in \mathbb{N}$. Calcoliamo il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} \sin^m(t)dt.$$

Sia γ la circonferenza di centro 0 e raggio 1.

$$\int_0^{2\pi} \sin^m(t)dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^m dt = \frac{1}{(2i)^m}\int_{+\gamma}(z-z^{-1})^m \frac{dz}{iz} =^{(2)}$$

$$= \frac{1}{2^m i^{m+1}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}(-1)^k \int_{+\gamma} z^{m-2k-1}dz =^{(3)}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq 2k \\ \frac{2\pi i}{2^m i^{m+1}}\binom{m}{\frac{m}{2}}(-1)^{\frac{m}{2}} = \frac{2\pi}{2^m}\frac{m!}{((m/2)!)^2} & \text{se } m = 2k \text{ (cioè } k = \frac{m}{2}\text{)}. \end{cases}$$

3.2.2 Integrali estesi a $\mathbb{R}$

Descriviamo un metodo che fa uso del teorema dei residui per il calcolo di integrali estesi a tutto $\mathbb{R}$.
L'integrale esteso a tutto $\mathbb{R}$ si può intendere in uno dei seguenti tre modi:

---

[2] Applichiamo il teorema del binomio di Newton a $(z^2-1)^m$.

[3]

$$\int_{+\gamma}(z)^{m-2k-1}dz = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq 2k \\ 2i\pi & \text{se } m = 2k \end{cases}$$

1. come l'integrale di Lebesgue $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$;

2. come
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)dx$$
e si parla di sommabilità in senso improprio;

3. come
$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx$$
e si parla di sommabilità in valore principale.

Valgono le seguenti implicazioni, nessuna delle quali invertibile: sommabilità secondo Lebesgue $\Rightarrow$ sommabilità in senso improprio $\Rightarrow$ sommabilità in valore principale. Supponiamo che esista una funzione $\varphi(z)$ olomorfa nel semipiano $Im(z) \geq 0$ privato di un numero finito di punti $z_1, \cdots, z_n$ tale che $\varphi(x) = f(x)$ e applichiamo il teorema dei residui per calcolare l'integrale curvilineo esteso a una curva chiusa C_R, contenuta nel semipiano $Im(z) \geq 0$ unione dell'intervallo $[-R, R]$ sull'asse reale ed un cammino Γ_R congiungente i punti $(-R, 0)$ e $(R, 0)$ con $R > max\{|z_1|, \cdots, |z_n|\}$. Si ha
$$\int_{+C_R}\varphi(z)dz =^{(4)} \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{+\Gamma_R}\varphi(z)dz =^{(5)} 2i\pi\sum_{j=1}^{n} Res(\varphi(z); z_j)$$
passando al limite si ottiene
$$\lim_{R\to\infty}\int_{+C_R}\varphi(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_{+\Gamma_R}\varphi(z)dz =$$
$$= 2i\pi\sum_{j=1}^{n} Res(\varphi(z); z_j)$$

[4] Per la proprietà di additività dell'integrale curvilineo.

[5] Per il teorema dei residui.

per cui

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_{+\Gamma_R}\varphi(z)dz = 2i\pi\sum_{j=1}^{n} Res(\varphi(z); z_j)$$

equivalentemente

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_{+\Gamma_R}\varphi(z)dz = 2i\pi\sum_{j=1}^{n} Res(\varphi(z); z_j).$$

Si ha quindi

$$v.p\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2i\pi\sum_{j=1}^{n} Res(\varphi(z); z_j) - \lim_{R\to\infty}\int_{+\Gamma_R}\varphi(z)dz$$

quindi conoscendo la somma dei residui e

$$\lim_{R\to\infty}\int_{+\Gamma_R}\varphi(z)dz$$

conosciamo il valore principale dell'integrale. Per conoscere

$$\lim_{R\to\infty}\int_{+\Gamma_R}\varphi(z)dz$$

occorre il seguente lemma:

Lemma 3.2.1. *Sia $\varphi(z)$ una funzione continua nel settore circolare*

$$S = \left\{ \ z \in \mathbb{C} : |z| \geq r, \alpha \leq arg z \leq \beta \ \right\},$$

con $r \geq 0$, $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$. Supponiamo che

$$\lim_{z\to\infty} z\varphi(z) = \lambda,$$

allora

$$\lim_{R\to\infty}\int_{+\Gamma_R}\varphi(z)dz = i\lambda(\beta-\alpha) \tag{3.8}$$

dove

$$\Gamma_R = \left\{ \ z \in S : |z| = R \ \right\}.$$

Dimostrazione. Partiamo dall'ipotesi

$$\lim_{z\to\infty} z\varphi(z) = \lambda$$

cioè per ogni $\epsilon > 0$ $\exists\delta > r$ tale che se $z \in S$ e $|z| > \delta$ allora $|z\varphi(z) - \lambda| < \frac{\epsilon}{\beta-\alpha}$. Sia $R > \delta$ e sia Γ_R la circonferenza di equazione parametrica $z(t) = Re^{it}$, con $t \in [\alpha, \beta]$. Per definizione di limite affinché 3.8 sia soddisfatta occorre che

$$\left| \int_{+\Gamma_R} \varphi(z)dz - i\lambda(\beta - \alpha) \right| < \epsilon.$$

Mostriamolo

$$\begin{aligned}
\left| \int_{+\Gamma_R} \varphi(z)dz - i\lambda(\beta - \alpha) \right| &= \left| \int_{+\Gamma_R} \varphi(z)dz - i\lambda \int_\alpha^\beta dt \right| = \\
&= \left| \int_{+\Gamma_R} \varphi(z)dz - \lambda \int_{+\Gamma_R} \frac{1}{z} dz \right| = \\
&= \left| \int_{+\Gamma_R} \left(\varphi(z) - \frac{\lambda}{z} \right) dz \right| \leq \\
&\leq (\beta - \alpha) R \max_{\Gamma_R} \frac{|\varphi(z) - \lambda|}{|z|} = \\
&= (\beta - \alpha) R \max_{\Gamma_R} \frac{|\varphi(z) - \lambda|}{R} = \\
&= (\beta - \alpha) \max_{\Gamma_R} |\varphi(z) - \lambda| < (\beta - \alpha) \frac{\epsilon}{\beta - \alpha} = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.2.2 (Jordan)**.** *Sia $\varphi(z)$ una funzione continua nel settore circolare*

$$S = \left\{ \, z \in \mathbb{C} : |z| \geq r, \alpha \leq arg z \leq \beta \, \right\},$$

con $r \geq 0$, $\alpha, \beta \in [0, \pi]$. Sia $\mu > 0$ e

$$\lim_{z\to\infty} \varphi(z) = 0,$$

allora

$$\lim_{R\to\infty}\int_{+\Gamma_R} e^{i\mu z}\varphi(z)dz = 0$$

dove

$$\Gamma_R = \left\{ \ z \in S : |z| = R \ \right\}.$$

Dimostrazione. Partiamo dall'ipotesi

$$\lim_{z\to\infty}\varphi(z) = 0$$

cioè per ogni $\epsilon > 0$ $\exists\delta > r$ tale che se $z \in S$ e $|z| > \delta$ allora $|\varphi(z)| < \epsilon\frac{\mu}{\pi}$. Sia $R > \delta$, dobbiamo far vedere che

$$\left|\int_{+\Gamma_R} e^{i\mu z}\varphi(z)dz\right| < \epsilon.$$

Ci sarà utile la seguente funzione:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{in } 0 < t \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{in } 0 \end{cases}$$

questa funzione è decrescente e dunque

$$\frac{2t}{\pi} \leq \sin(t) \tag{3.9}$$

dove $\frac{2}{\pi}$ è il minore valore che può assumere in tale intervallo. Si ha

$$\begin{aligned}
\left| \int_{+\Gamma_R} e^{i\mu z}\varphi(z)dz \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} e^{i\mu R(\cos(t)+i\sin(t))}\varphi(z(t))Re^{it}dt \right| \leq \\
&\leq \int_{\alpha}^{\beta} |e^{i\mu R(\cos(t)+i\sin(t))}\varphi(z(t))Re^{it}|dt < \\
&< R\epsilon\frac{\mu}{\pi}\int_0^{\pi} |e^{i\mu R(\cos(t)+i\sin(t))}e^{it}|dt = \\
&= R\epsilon\frac{\mu}{\pi}\int_0^{\pi} |e^{i\mu R(\cos(t)+i\sin(t))}|dt = \\
&= R\epsilon\frac{\mu}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\mu R\sin(t)}dt = 2R\epsilon\frac{\mu}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\mu R\sin(t)}dt \leq \\
&\leq 2R\epsilon\frac{\mu}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\mu R\frac{2t}{\pi}}dt = \\
&= \frac{\mu}{\pi}\frac{2R\epsilon\pi}{-2R\mu}(e^{-\mu R}-1) < \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Il seguente lemma viene utilizzato quando vogliamo conoscere

$$\lim_{R\to\infty}\int_{+\Gamma_R}\varphi(z)dz$$

e la funzione $\varphi(z)$ è contenuta nel semipiano $Im(z) \leq 0$.

Lemma 3.2.3 (Jordan). *Sia $\varphi(z)$ una funzione continua nel settore circolare*

$$S = \left\{ \ z \in \mathbb{C} : |z| \geq r, \alpha \leq argz \leq \beta \ \right\},$$

con $r \geq 0$, $\alpha, \beta \in [\pi, 2\pi]$. Sia $\mu < 0$ e

$$\lim_{z\to\infty}\varphi(z) = 0,$$

allora

$$\lim_{R\to\infty}\int_{+\Gamma_R} e^{i\mu z}\varphi(z)dz = 0$$

dove

$$\Gamma_R = \left\{ \ z \in S : |z| = R \ \right\}.$$

Possiamo calcolare anche l'integrale di una funzione che presenta un punto di discontinuità. Sia quindi $\varphi(z)$ una funzione contenuta nel semipiano $Im(z) \geq 0$ dotata di una singolarità isolata in zero e consideriamo il seguente cammino $C_{\epsilon,R}$ unione degli intervalli $[-R, -\epsilon]$, $[\epsilon, R]$ sull'asse reale e delle due semicirconferenze γ_ϵ, γ_R centrate in zero e di raggi rispettivamente ϵ ed R. Applicando il teorema dei residui si ottiene:

$$\int_{+C_{\epsilon,R}} \varphi(z)dz = \int_{-R}^{-\epsilon} f(x)dx + \int_{\epsilon}^{R} f(x)dx + \int_{+\gamma_R} \varphi(z)dz - \int_{+\gamma_\epsilon} \varphi(z)dz =$$
$$= 2i\pi \sum_{j=1}^{n} Res(\varphi(z); z_j)$$

e passando al limite per $R \to \infty$ e $\epsilon \to 0$ abbiamo

$$\lim_{\epsilon\to 0, R\to\infty} \left(\int_{-R}^{-\epsilon} f(x)dx + \int_{\epsilon}^{R} f(x)dx + \int_{+\gamma_R} \varphi(z)dz - \int_{+\gamma_\epsilon} \varphi(z)dz \right) = 2i\pi \sum_{j=1}^{n} Res(\varphi(z); z_j)$$

per cui si ha

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \lim_{\epsilon\to 0, R\to\infty} \left(\int_{+\gamma_R} \varphi(z)dz - \int_{+\gamma_\epsilon} \varphi(z)dz \right) = 2i\pi \sum_{j=1}^{n} Res(\varphi(z); z_j)$$

da cui si ottiene:

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2i\pi \sum_{j=1}^{n} Res(\varphi(z); z_j) + \lim_{\epsilon\to 0} \int_{+\gamma_\epsilon} \varphi(z)dz - \lim_{R\to\infty} \int_{+\gamma_R} \varphi(z)dz.$$

Dunque conoscendo

$$\lim_{R\to\infty} \int_{+\gamma_R} \varphi(z)dz$$

e

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{+\gamma_\epsilon} \varphi(z) dz$$

possiamo conoscere il valore principale dell'integrale, il primo si calcola utilizzando i lemmi precedenti, il secondo con il seguente lemma.

Lemma 3.2.4 (Jordan)**.** *Siano* $z_0 \in \mathbb{C}$ *e* $\varphi(z)$ *una funzione continua nel settore circolare*

$$S = \left\{ \ z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| \leq r, \alpha \leq argz \leq \beta \ \right\},$$

con $r > 0$*,* $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$*. Supponiamo che*

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)\varphi(z) = \lambda,$$

allora

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{+\gamma_\epsilon} \varphi(z) dz = i\lambda(\beta - \alpha)$$

dove

$$\gamma_\epsilon = \left\{ \ z \in S : |z| = \epsilon \ \right\}.$$

Consideriamo il seguente esempio.

Esempio 3.2.2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

questa funzione non è integrabile secondo Lebesgue ma è sommabile in senso improprio.

Calcoliamo per cui l'integrale in senso improprio della funzione sulla semiretta reale.

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx =^{(6)} \frac{1}{4i}\left(v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}dx - v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x}dx\right).$$

Calcoliamo prima

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}dx \tag{3.10}$$

e poi

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x}dx. \tag{3.11}$$

Dunque per calcolare l'integrale 3.10 occorre considerare la funzione complessa $\varphi(z) = \frac{e^{iz}}{z}$, la quale è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Per il teorema di Cauchy-Goursat essendo $\varphi(z)$ una funzione olomorfa nell'aperto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, dobbiamo considerare un dominio regolare T che sia contenuto in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, trovato questo allora

$$\int_{+\partial T} \varphi(z)dz = 0.$$

Consideriamo come dominio regolare $C_{\epsilon,R}$, sottoinsieme del semipiano $Im(z) \geq 0$, unione degli intervalli $[-R, -\epsilon]$, $[\epsilon, R]$ sull'asse reale e delle due semicirconferenze γ_ϵ, γ_R centrate in zero e di raggi rispettivamente ϵ ed R, per cui si ha:

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}dx - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{+\gamma_\epsilon} \varphi(z)dz + \lim_{R \to \infty} \int_{+\gamma_R} \varphi(z)dz = 0.$$

Dobbiamo quindi calcolare i due limiti perciò dobbiamo utilizzare i lemmi precedenti.

Siccome

$$\lim_{z \to 0} z\frac{e^{iz}}{z} = 1,$$

[6] Per definizione di seno complesso.

allora per il lemma 3.2.4 si ha

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{+\gamma_\epsilon} \varphi(z)dz = {}^{(7)} i\pi.$$

Ora per calcolare l'integrale

$$\lim_{R \to \infty} \int_{+\gamma_R} \varphi(z)dz$$

occorre utilizzare il lemma 3.2.2. Innanzitutto abbiamo

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1}{z} = 0$$

allora

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} \varphi(z)dz = 0$$

per cui si ha

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi.$$

Dobbiamo calcolare ora l'integrale 3.11, per far ciò occorre innanzittutto considerare la funzione complessa $\psi(z) = \frac{e^{-iz}}{z}$, la quale è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Per il teorema di Cauchy-Goursat essendo $\psi(z)$ una funzione olomorfa nell'aperto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, dobbiamo considerare un dominio regolare T che sia contenuto in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, trovato questo allora

$$\int_{+\partial T} \psi(z)dz = 0.$$

Consideriamo come dominio regolare $C_{\epsilon,R}$, sottoinsieme del semipiano $Im(z) \leq 0$, unione degli intervalli $[-R, -\epsilon]$, $[\epsilon, R]$ sull'asse

[7] Perché stiamo prendendo come insieme S il semipiano $Im(z) \geq 0$, e quindi $\alpha = 0$ e $\beta = \pi$, inoltre $\lambda = 1$.

reale e delle due semicirconferenze γ_ϵ, γ_R centrate in zero e di raggi rispettivamente ϵ ed R, per cui si ha:

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{+\gamma_\epsilon} \psi(z)dz - \lim_{R\to\infty} \int_{+\gamma_R} \psi(z)dz = 0.$$

Dobbiamo quindi calcolare i due limiti, perciò dobbiamo utilizzare i lemmi precedenti.

Siccome

$$\lim_{z\to 0} z \frac{e^{-iz}}{z} = 1,$$

allora per il lemma 3.2.4 si ha

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{+\gamma_\epsilon} \psi(z)dz =^{(8)} i\pi$$

Ora per calcolare l'integrale

$$\lim_{R\to\infty} \int_{+\gamma_R} \psi(z)dz$$

occorre utilizzare il lemma 3.2.3. Innanzitutto abbiamo

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0$$

allora

$$\lim_{R\to\infty} \int_{+\gamma_R} \psi(z)dz = 0$$

per cui si ha

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx = -i\pi.$$

Quindi

$$\int_0^\infty f(x)dx = \frac{1}{4i}\left(v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx - v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx \right) = \frac{1}{4i}(i\pi - (-i\pi)) = \frac{\pi}{2}.$$

[8]Perché stiamo prendendo come insieme S il semipiano $Im(z) \leq 0$, e quindi $\alpha = \pi$ e $\beta = 2\pi$, inoltre $\lambda = 1$.

Abbiamo risolto questo integrale tramite il teorema di Cauchy-Goursat, ora invece utilizziamo il Teorema dei residui.

Si procede nello stesso modo però occorre calcolare i residui. Occorre calcolare l'integrale 3.10; per farlo consideriamo la funzione complessa $\varphi(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ e per essa possiamo scrivere la seguente formula:

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = 2i\pi \sum_{j=1}^{n} Res(\varphi(z); z_j) + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{+\gamma_\epsilon} \varphi(z)dz - \lim_{R \to \infty} \int_{+\gamma_R} \varphi(z)dz$$

gli ultimi integrali gli abbiamo già calcolati, non ci resta da calcolare i residui. La funzione $\varphi(z)$ ha solo un polo per $z = 0$ d'ordine 1, in quanto

$$\lim_{z \to 0} z \frac{e^{iz}}{z} = 1;$$

ma $z = 0$ non è interno a $C_{\epsilon,R}$ per cui la somma dei residui è nulla. Quindi

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = 0 + i\pi = i\pi.$$

Ora occorre calcolare l'integrale 3.11; per farlo consideriamo la funzione $\psi(z) = \frac{e^{-iz}}{z}$ e per essa possiamo scrivere la seguente formula:

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx = 2i\pi \sum_{j=1}^{n} Res(\psi(z); z_j) - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{+\gamma_\epsilon} \psi(z)dz + \lim_{R \to \infty} \int_{+\gamma_R} \psi(z)dz$$

La funzione $\psi(z)$ ha solo un polo per $z = 0$ d'ordine 1, in quanto

$$\lim_{z \to 0} z \frac{e^{-iz}}{z} = 1;$$

ma $z = 0$ non è interno a $C_{\epsilon,R}$ per cui la somma dei residui è nulla. Quindi

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx = 0 - i\pi = -i\pi.$$

In definitiva l'integrale

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{4i}\left(v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}dx - v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x}dx\right) =$$
$$= \frac{1}{4i}(i\pi - (-i\pi)) = \frac{1}{4i}(2i\pi) = \frac{\pi}{2}$$

per cui abbiamo trovato lo stesso risultato.

Appendice A

Le forme differenziali

In questa appendice verranno esposti soltanto risultati utili ai fini della trattazione. Sono dati i seguenti risultati sulle forme differenziali nel piano senza dimostrazione.
Sia E un aperto di $\mathbb{R}^2$ e siano $F_1, F_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni definite in E. L'espressione $\omega = F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy$ viene detta forma differenziale lineare.

Definizione A.0.1. *Data una forma differenziale ω di classe C^1, se esiste una funzione $U : E \longrightarrow \mathbb{R}$, di classe C^2 tale che $dU = \omega$ in E allora ω si dice esatta e U è una primitiva di ω.*

Se U è una primitiva della forma differenziale ω anche la funzione $U + c$ dove c è una costante reale, è una primitiva di ω. Viceversa, nell'ipotesi che E sia un aperto connesso, denotate con U e V due primitive di ω, per il **Teorema delle funzioni con gradiente nullo**, che afferma che se una funzione f ammette gradiente nullo in tutti i punti di un aperto connesso $E \subseteq \mathbb{R}^2$ allora f è costante in E, si ha $U(x,y) - V(x,y) = cost.$

Teorema A.0.1. *Sia ω una forma differenziale di classe $C^1(E)$, E un aperto connesso. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *Per ogni coppia di curve regolari a tratti γ_1 e γ_2 contenute in E ed aventi stesso punto iniziale e stesso punto finale*
$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$
2. *Per ogni curva chiusa γ regolare a tratti contenuta in E*
$$\oint_{\gamma} \omega = 0.$$
3. *ω è esatta.*

Definizione A.0.2. *Una forma differenziale $F_1(x,y)dx+F_2(x,y)dy$, di classe C^1 in un aperto E di $\mathbb{R}^2$ si dice chiusa in E se*
$$\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}.$$

Teorema A.0.2. *Sia $F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy$ una forma differenziale di classe C^1 in un aperto E di $\mathbb{R}^2$. Se la forma differenziale è esatta allora è anche chiusa in E.*

Vale anche il viceversa se il dominio è semplicemente connesso.

Teorema A.0.3 (Forme differenziali in un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{R}^2$)**.** *Una forma differenziale lineare $F_1(x,y)dx+F_2(x,y)dy$ definita in un aperto E semplicemente connesso, ivi di classe C^1 e chiusa, è esatta in E.*

Bibliografia

[1] G.di Fazio - M.Frasca, *Metodi matematici per l'ingegneria*, Monduzzi editore

[2] C.D.Pagani - S.Salsa, *Analisi matematica Volume 1*, Zanichelli ('99)

[3] Marco Abate, *Geometria*, McGraw-Hill ('96)

[4] N.Fusco - P.Marcellini - C.Sbordone, *Elementi di analisi matematica due*, Liguori editore ('01)

[5] Edoardo Sernesi, *Geometria II vol*, Bollati Boringhieri, ristampa 2006.