Università degli Studi di Cagliari
facoltà di scienze matematiche, fisiche e naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Applicazioni della trasformata di Laplace

Relatore:
Dott. Lucio Cadeddu

Tesi di Laurea di:
Maria Antonietta Farina

Anno Accademico 2010-2011

Indice

Introduzione

In questa tesi studieremo la trasformata di Laplace e qualche sua interessante applicazione pratica.
La trasformata di Laplace, inventata da Laplace (1749–1827), è una trasformata integrale [1] con $K = e^{-st}$ e $I = [0, +\infty[$. Analizzeremo le proprietà fondamentali della trasformata di Laplace, il legame tra trasformata e derivata, e grazie alla formula di Bromwich sapremo anche come, data la trasformata di una funzione, trovare la sua trasformata inversa. Utilizzeremo questi risultati in due applicazioni pratiche:

- la risoluzione di un'equazione differenziale;
- la risoluzione di un'equazione integrale.

Tra le due applicazioni ci soffermeremo sulla prima.
Ci serviremo della trasformata di Laplace per risolvere (con qualche semplificazione) i due problemi fisici seguenti:

- determinare la velocità di un fluido viscoso che passa da uno stato di quiete a uno di moto;
- dato un circuito RLC trovare la differenza di potenziale ai capi del condensatore.

Il primo problema si esprime matematicamente con un'equazione differenziale alle derivate parziali con determinate condizioni iniziali e al contorno, e il secondo con un'equazione differenziale ordinaria con condizioni iniziali assegnate.
Applicare la trasformata di Laplace a problemi di questo tipo è vantaggioso. Infatti l'equazione iniziale da risolvere viene trasformata in un'equazione algebrica che può essere facilmente risolta . La soluzione è la trasformata della funzione incognita iniziale, quindi a questo punto basta calcolare la trasformata inversa e il problema è risolto. Questo modo di procedere è lecito per tutte le trasformate integrali. Tuttavia vedremo subito un caso particolare in cui la trasformata di Laplace fornisce un risultato soddisfacente a differenza di un'altra trasformata che conosciamo, la trasformata di Fourier.

[1] ossia un operatore che a una funzione f associa una funzione $F(s) = \int_I f(t)K(t,s)\,dt$, dove K è il nucleo della trasformata.

Capitolo 1

La trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace, come la trasformata di Fourier, può essere applicata per risolvere equazioni differenziali ordinarie. Ad esempio consideriamo un circuito RLC con resistenza, capacità e induttanza disposte in serie. Utilizzando le leggi di Kirchoff delle tensioni e delle correnti ricaviamo l'equazione differenziale associata

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = e,$$

e le condizioni iniziali. Per semplicità supponiamo che il problema da risolvere sia

$$\begin{cases} v'' + v' + v = 0 \\ v(0) = v'(0) = 1 \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Fourier si trova la funzione identicamente nulla, che non soddisfa le condizioni iniziali. Al contrario, con la trasformata di Laplace troveremo la soluzione. Ma prima di approfondire questo esempio dobbiamo conoscere bene la trasformata di Laplace.

1.1 Definizione e primi esempi

Definizione 1.1. *Sia* $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) \equiv 0$ *in* $]-\infty, 0[$, $f \in L^1_{loc}([0, +\infty[)$. *Fissato* $s_0 \in \mathbb{C}$, *si dirà che* f *è trasformabile secondo Laplace in* s_0 *quando*

$$\mathcal{L}[f(t)] = {}^*\!\!\int_0^{+\infty} e^{-s_0 t} f(t)\, dt = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T e^{-s_0 t} f(t)\, dt$$

esiste finito (o equivalentemente la funzione $e^{-s_0 t} f(t)$ *è sommabile in senso improprio in* $[0, +\infty[$*). Denotiamo* $\mathcal{L}[f(t)]$ *anche con* $F(s)$*.*

Esempio 1.1. *Consideriamo* $f(t) = e^{kt}$*, dove* k *è una costante.*

$$\mathcal{L}[e^{kt}] = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T e^{-st} e^{kt}\, dt = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T e^{-(s-k)t}\, dt = \lim_{T\to+\infty} \left[\frac{e^{-(s-k)t}}{-(s-k)} \right]_0^T$$

Affinché $e^{-(s-k)t} \to 0$ *per* $t \to +\infty$, *e quindi che l'integrale converga, è necessario avere* $s > k$. *Se* s *è una variabile complessa allora* $Re\, s > Re\, k$. *Questo mostra che*

$$\mathcal{L}[e^{kt}] = \frac{1}{s-k} \quad per \quad Re\, s > Re\, k.$$

Esempio 1.2. *Consideriamo* $f(t) = \cos \omega t$, *dove* ω *è una costante. Dato che* $\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos \omega t] &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2} \int_0^T \left(e^{(i\omega - s)t} + e^{-(i\omega - s)t}\right) dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}\end{aligned}$$

con $Re\, s > 0$.
Con un procedimento simile si ottiene

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

E in modo analogo

$$\mathcal{L}[\cosh at] = \frac{s}{s^2-a^2}, \quad \mathcal{L}[\sinh at] = \frac{a}{s^2-a^2}.$$

Esempio 1.3. *Consideriamo* $f(t) = t^n$ *per* $n \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}[t^n] = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T e^{-st} t^n \, dt.$$

Posto $x = st$, $dx = sdt$, *otteniamo*

$$\mathcal{L}[t^n] = {}^{*}\!\!\int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^n \frac{1}{s}\, dx = \frac{1}{s^{n+1}} {}^{*}\!\!\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n \, dx = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}.$$

Se n *è intero*

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

1.2 Esistenza della trasformata

Lemma 1.1. *Se* f *è* $\mathcal{L}$*-trasformabile in* $s_0 \in \mathbb{C}$, *allora* f *è* $\mathcal{L}$*-trasformabile in* $s \in \mathbb{C}$, *tale che* $Re\, s > Re\, s_0$.

Dimostrazione. Dimostriamo che se $Re\, s > Re\, s_0$

$${}^{*}\!\!\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$$

esiste finito.
Introduciamo la funzione

$$\Phi_0(t) = \int_0^t e^{-s_0\tau} f(\tau)\, d\tau \qquad t \in \mathbb{R}.$$

La funzione $\Phi_0(t)$ è nulla per $t \leq 0$ ed è localmente assolutamente continua in quanto funzione integrale di una funzione localmente sommabile. Inoltre la sua derivata, che esiste quasi ovunque per il teorema di derivazione di Lebesgue, è uguale a $e^{-s_0 t} f(t)$ quasi ovunque in $[0, +\infty[$.
Integriamo per parti:

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt &= \int_0^T e^{-(s-s_0)t} e^{-s_0 t} f(t)\, dt \\ &= \left[e^{-(s-s_0)t}\Phi_0(t)\right]_0^T + (s-s_0)\int_0^T e^{-(s-s_0)t}\Phi_0(t)\, dt \qquad (1.1) \\ &= e^{-(s-s_0)T}\Phi_0(T) + (s-s_0)\int_0^T e^{-(s-s_0)t}\Phi_0(t)\, dt\end{aligned}$$

Consideriamo il limite per $T \to +\infty$. La funzione $\Phi_0(T)$ è limitata in quanto continua e convergente per $T \to +\infty$. si ha

$$\left|e^{-(s-s_0)T}\Phi_0(T)\right| \leq \sup_{\mathbb{R}} |\Phi_0| \cdot e^{-(Res - Res_0)T}$$

e quindi

$$\lim_{T\to+\infty} e^{-(s-s_0)T}\Phi_0(T) = 0$$

La funzione $e^{-(Re\, s - Re\, s_0)t}$ è sommabile in $[0, +\infty[$ e quindi lo è anche la funzione $e^{-(s-s_0)t}\Phi_0(t)$. Infine passando al limite per $T \to +\infty$ nella (1.1), si ha

$$\int_0^{*+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = (s-s_0)\int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0)t}\Phi_0(t)\, dt$$

□

Nel caso in cui la funzione $e^{-s_0 t} f(t)$ è sommabile secondo Lebesgue in $[0, +\infty[$ diremo che f è *assolutamente $\mathcal{L}$-trasformabile* in s_0. Se f è assolutamente $\mathcal{L}$-trasformabile in s_0 essa è anche $\mathcal{L}$-trasformabile in s_0.

Lemma 1.2. *Sia f una funzione assolutamente $\mathcal{L}$-trasformabile in $s_0 \in \mathbb{C}$, allora f è assolutamente $\mathcal{L}$-trasformabile in $s \in \mathbb{C}$ tale che $Re\, s > Re\, s_0$.*

Dimostrazione. È una conseguenza immediata della maggiorazione

$$|e^{-st} f(t)| = e^{-(Re\, s - Re\, s_0)t}|e^{-s_0 t} f(t)| \leq |e^{-s_0 t} f(t)|.$$

□

Sia $f \in L^1_{loc}([0,+\infty[)$, $f(t) \equiv 0$ in $]-\infty, 0[$, consideriamo i seguenti insiemi numerici:

$$I = \{s \in \mathbb{R} : f \text{ è } \mathcal{L}\text{-trasformabile in } s\},$$

$$I^* = \{s \in \mathbb{R} : f \text{ è assolutamente } \mathcal{L}\text{-trasformabile in } s\},$$

e poniamo

$$\rho = \begin{cases} \inf I & \text{se} \quad I \neq \emptyset \\ +\infty & \text{se} \quad I = \emptyset \end{cases}$$

$$\rho^* = \begin{cases} \inf I^* & \text{se} \quad I^* \neq \emptyset \\ +\infty & \text{se} \quad I^* = \emptyset \end{cases}$$

ρ e ρ^* si chiamano ascissa di convergenza e ascissa di assoluta convergenza rispettivamente. Ovviamente $\rho \leq \rho^*$.

Sia $H(t)$ la funzione di Heaviside. Utilizzando i due lemmi e le proprietà dell'estremo inferiore possiamo provare che:

Teorema 1.1. *Sia $f \in L^1_{loc}([0,+\infty[)$. Allora $f(t)H(t)$ è $\mathcal{L}$-trasformabile (assolutamente $\mathcal{L}$-trasformabile) nel semipiano $Re\, s > \rho$ ($Re\, s > \rho^*$), e non è $\mathcal{L}$-trasformabile (assolutamente $\mathcal{L}$-trasformabile) nel semipiano $Re\, s < \rho$ ($Re\, s < \rho^*$).*

L'insieme I può essere vuoto. Ad esempio consideriamo la funzione e^{t^2}, questa non è mai $\mathcal{L}$-trasformabile perché

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-st} e^{t^2} = +\infty \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 1.1. *Supponiamo che esista $t^* \geq 0$ tale che la funzione $f(t)$ abbia segno costante per $t > t^*$, allora $\rho = \rho^*$. Per esempio sia $f \geq 0$ e $s > \rho$, allora*

$$^*\!\!\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^{t^*} e^{-st} f(t)\, dt + {}^*\!\!\int_{t^*}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt =$$
$$\int_0^{t^*} e^{-st} f(t)\, dt + \int_{t^*}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Ma in generale non è vero che ρ e ρ^* sono uguali. Per esempio, si può provare che, per la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t = 0 \\ (-1)^n e^t & \text{se} \quad \log n \leq t < \log(n+1), \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

non vale.

Vediamo ora una classe di funzioni che ammettono trasformata di Laplace. Diciamo che una funzione $f(t)$ è di *ordine esponenziale* su $0 \leq t < +\infty$ se esistono due costanti A e b tali che $|f(t)| < Ae^{bt}$ per $t \in [0, +\infty[$.

Teorema 1.2 (Teorema di Lerch)**.** *Una funzione continua a tratti di ordine esponenziale su* $[0, +\infty[$ *ammette trasformata di Laplace.*

Teorema 1.3. *Sia* f *di ordine esponenziale su* $[0, +\infty[$*, allora* $\mathcal{L}[f] \to 0$ *quando* $t \to +\infty$*.*

Dimostrazione. Prendiamo la definizione di $\mathcal{L}[f(t)]$ e il suo modulo, otteniamo

$$|\mathcal{L}[f(t)]| = \left| {}^{*}\!\!\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt \right| \leq {}^{*}\!\!\int_0^{+\infty} |e^{-st} f(t)|\, dt = {}^{*}\!\!\int_0^{+\infty} e^{-st} |f(t)|\, dt,$$

usando la disuguaglianza triangolare. Se f è di ordine esponenziale,

$$|\mathcal{L}[f(t)]| < {}^{*}\!\!\int_0^{+\infty} e^{-st} A e^{bt}\, dt = {}^{*}\!\!\int_0^{+\infty} A e^{(b-s)t}\, dt$$

$$= \lim_{Y \to +\infty} \left[\frac{A}{b-s} e^{(b-s)t} \right]_0^Y = \lim_{Y \to +\infty} \left[\frac{A}{b-s} e^{(b-s)Y} - \frac{A}{b-s} \right].$$

Quando $s > b$ abbiamo

$$|\mathcal{L}[f(t)]| < \frac{A}{s-b},$$

e quindi $|\mathcal{L}[f(t)]| \to 0$ per $|s| \to +\infty$. □

Viceversa se

$$\lim_{s \to +\infty} \mathcal{L}[f(t)] \neq 0$$

allora $\mathcal{L}[f(t)]$ non è la trasformata di Laplace di una funzione di ordine esponenziale.
Se f non è di ordine esponenziale e cresce molto velocemente quando $t \to +\infty$, l'integrale non converge. Per esempio, consideriamo ancora la funzione e^{t^2},

$$\mathcal{L}[e^{t^2}] = \lim_{N \to +\infty} \int_0^N e^{t^2} e^{-st}\, dt.$$

Dato che e^{t^2} cresce più velocemente di e^{-st} per ogni s, l'integrando diverge, e quindi la trasformata di Laplace di e^{t^2} non esiste.

1.3 Proprietà della trasformata

Teorema 1.4 (Linearità)**.** *Siano date due funzione* $f(t)$ *e* $g(t)$ $\mathcal{L}$*-trasformabili per* $Re\, s > \rho_1$*,* $Re\, s > \rho_2$ *rispettivamente e siano* α*,* $\beta \in \mathbb{C}$*.*
Se $Re\, s > \max(\rho_1, \rho_2)$ *allora*

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)].$$

Dimostrazione. Dalla definizione

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \int_0^{*\,+\infty} e^{-st}(\alpha f(t) + \beta g(t))\, dt$$

$$= \alpha \int_0^{*\,+\infty} e^{-st} f(t)\, dt + \beta \int_0^{*\,+\infty} e^{-st} g(t)\, dt = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)].$$

□

Osservazione 1.2. *L'ascissa di convergenza di $\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)]$ è in generale minore o uguale al* $\max(\rho_1, \rho_2)$.

La linearità è molto utile nei calcoli.

Teorema 1.5 (Primo teorema di shifting)**.** *Se f è $\mathcal{L}$-trasformabile, $\mathcal{L}[f] = F(s)$, per $Re\, s > \rho$, allora $e^{\alpha t} f(t)$ è $\mathcal{L}$-trasformabile e $\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha)$ per $Re\, s > Re\, \alpha + \rho$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Dalla definizione

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = \int_0^{*\,+\infty} e^{-st} e^{\alpha t} f(t)\, dt = \int_0^{*\,+\infty} e^{-(s-\alpha)t} f(t)\, dt = F(s - \alpha),$$

e quindi $Re\,(s - \alpha) > \rho$. □

Esempio 1.4. *Consideriamo la funzione $f(t) = e^{3t} \cos 4t$. Sappiamo che*

$$\mathcal{L}[\cos 4t] = \frac{s}{s^2 + 4^2} \quad per \quad Re\, s > 0.$$

Usiamo il teorema precedente:

$$\mathcal{L}[e^{3t} \cos 4t] = \frac{s - 3}{(s - 3)^2 + 4^2} \quad per \quad Re\, s > 3.$$

Teorema 1.6 (Secondo teorema di shifting)**.** *Se f è $\mathcal{L}$-trasformabile, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ per $Re\, s > \rho$, allora $g(t) = H(t-a) f(t-a)$ è $\mathcal{L}$-trasformabile e $\mathcal{L}[g(t)] = e^{-sa} F(s)$, per $Re\, s > \rho$ e $a > 0$.*

Dimostrazione. Dalla definizione

$$\mathcal{L}[g(t)] = \int_0^{*\,+\infty} g(t) e^{-st}\, dt = \int_a^{*\,+\infty} f(t - a) e^{-st}\, dt.$$

Posto $\tau = t - a$, diventa

$$\mathcal{L}[g(t)] = \int_0^{*\,+\infty} f(\tau) e^{-s\tau} e^{-sa}\, d\tau = e^{-sa} F(s).$$

Usando una variabile fittizia di integrazione ci siamo ricondotti alla definizione di trasformata di Laplace. □

Teorema 1.7. *Se f è $\mathcal{L}$-trasformabile, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ per $Re\, s > \rho$, allora $f(ct)$ è $\mathcal{L}$-trasformabile e $\mathcal{L}[f(ct)] = \frac{1}{c}F(\frac{s}{c})$, per $Re\, s > c\rho$ e $c > 0$.*

Dimostrazione. Dalla definizione

$$\mathcal{L}[f(ct)] = {}^{*}\!\!\int_0^{+\infty} f(ct)e^{-st}\, dt,$$

con il cambio di variabile $x = ct$ abbiamo

$$\mathcal{L}[f(ct)] = \frac{1}{c}\, {}^{*}\!\!\int_0^{+\infty} f(x)e^{-\frac{sx}{c}}\, dx = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right).$$

□

1.3.1 Trasformata di funzioni periodiche

Le funzioni periodiche intervengono in molte applicazioni, vediamo una formula per calcolare la trasformata di queste funzioni.

Proposizione 1.1. *Sia $f(t)$ una funzione periodica di periodo $l > 0$ e sia $f \in L^1(0, l)$. Allora la funzione $f(t)H(t)$ è $\mathcal{L}$-trasformabile (assolutamente) per $Re\, s > 0$ e vale la formula*

$$\mathcal{L}[f(t)H(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sl}} \int_0^l e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau.$$

Dimostrazione. Iniziamo dimostrando che l'ascissa di assoluta convergenza è 0. Per $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-st}|f(t)|\, dt &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{nl} e^{-st}|f((t)|\, dt \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kl}^{(k+1)l} e^{-st}|f((t)|\, dt. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dato che $f(t)$ è periodica, con il cambio di variabile $t = \tau + kl$ abbiamo

$$\int_{kl}^{(k+1)l} e^{-st}|f((t)|\, dt = e^{-slk} \int_0^l |f(\tau + kl)|\, d\tau = e^{-slk} \int_0^l e^{-s\tau}|f(\tau)|\, d\tau.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-st}|f(t)|\, dt &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-slk} \int_0^l e^{-s\tau}|f(\tau)|\, d\tau \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-sln} \int_0^l |f(\tau)|\, d\tau. \end{aligned} \tag{1.3}$$

La serie in (1.3) è una serie geometrica di ragione e^{-sl} convergente quando $s > 0$. Quindi l'ascissa di assoluta convergenza è 0, vediamo ora che 0 è anche l'ascissa di convergenza. Per provare questo dimostriamo che $f(t)H(t)$ non è $\mathcal{L}$-trasformabile in $s=0$, cioè che

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T f(t)\,dt$$

non esiste finito. Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{nl} f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} n\int_0^l f(\tau)\,d\tau.$$

Allora se

$$\int_0^l f(\tau)\,d\tau \neq 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{nl} f(t)\,dt = \infty,$$

e

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^{T} f(t)\,dt = \infty.$$

Se invece

$$\int_0^l f(\tau)\,d\tau = 0$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{nl} f(t)\,dt = 0. \tag{1.4}$$

Ma sicuramente esiste $l^* \in (0,l)$ tale che

$$\int_0^{l^*} f(\tau)\,d\tau \neq 0,$$

altrimenti

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau = 0 \qquad \forall t\in[0,l],$$

e derivando avremmo $f(t)=0$ q.o., e questo è assurdo perché la funzione ha periodo $l>0$. Allora

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_0^{l^*+nl} f(t)\,dt &= \lim_{n\to+\infty}\left\{\int_0^{nl} f(t)\,dt + \int_{nl}^{nl+l^*} f(t)\,dt\right\}\\ &= \int_0^{l^*} f(\tau)\,d\tau \neq 0.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Quindi per le (1.4) e (1.5) il limite

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T f(t)\,dt$$

non esiste. Concludiamo che, per $Re\, s > 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)H(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-sln} \int_0^l e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{1}{1-e^{-sl}} \int_0^l e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau.\end{aligned}$$

□

1.3.2 Comportamento al limite della trasformata

Dato α, $0 \leq \alpha < \pi/2$ e $s_0 \in \mathbb{C}$, poniamo

$$S(s_0, \alpha) = \{s \in \mathbb{C} \, : \, |arg(s - s_0)| \leq \alpha\}.$$

Lemma 1.3. *Sia f $\mathcal{L}$-trasformabile per $Re\, s > \rho$ e sia $s_0 \in \mathbb{C}$, $Re\, s_0 > \rho$. Allora*

$$\lim_{T\to+\infty} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt = {}^*\!\!\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt \quad \textit{uniformemente in } S(s_0, \alpha).$$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che, fissato $\epsilon > 0$, esiste un T_ϵ (che non dipende da $s \in S(s_0, \alpha)$), tale che per $T > T_\epsilon$ si abbia

$$\left| {}^*\!\!\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt - \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt \right| = \left| {}^*\!\!\int_T^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt \right| < \epsilon \tag{1.6}$$

per ogni $s \in S(s_0, \alpha)$. Consideriamo la funzione

$$\Phi_0(t) = \int_0^t e^{-s_0\tau} f(\tau)\, d\tau \qquad t \in \mathbb{R},$$

che è convergente per $t \to +\infty$. Per il criterio di Cauchy, dato $\epsilon > 0$ esiste $T_\epsilon > 0$ tale che, per $t \geq T > T_\epsilon$, si ha

$$|\Phi_0(t) - \Phi_0(T)| = \left| \int_T^t e^{-s_0\tau} f(\tau)\, d\tau \right| < \epsilon \cos \alpha. \tag{1.7}$$

Sia $s \in S(s_0, \alpha)$, $s \neq s_0$, allora $Re\, s > Re\, s_0$. Ripetendo il ragionamento del Lemma (1.1), questa volta per la funzione

$$\Phi_T(t) = \int_T^t e^{-s_0\tau} f(\tau)\, d\tau \qquad T > 0,\, t \in \mathbb{R},$$

arriviamo alla formula

$${}^*\!\!\int_T^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = (s - s_0) \int_T^{+\infty} e^{-(s-s_0)t} \Phi_T(t)\, dt. \tag{1.8}$$

Allora supponendo $t \geq T > T_\epsilon$, dalle (1.7), (1.8) otteniamo

$$\begin{aligned}\left|{}^*\!\!\int_T^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt\right| &\leq |s-s_0|\epsilon\cos\alpha \int_T^{+\infty} e^{-(Re\,s - Re\,s_0)t}\,dt \\ &= |s-s_0|\epsilon\cos\alpha \frac{e^{-(Re\,s-Re\,s_0)T}}{Re\,s - Re\,s_0} \\ < \epsilon\cos\alpha\frac{|s-s_0|}{Re\,s - Re\,s_0} &= \epsilon\cos\alpha\frac{1}{\cos\arg(Re\,s - Re\,s_0)} < \epsilon.\end{aligned}$$

□

Dal Lemma (1.3) seguono i due teoremi seguenti

Teorema 1.8. *Sia f una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile per $Re\,s > \rho$. Sia K un compatto contenuto nel semipiano di convergenza $Re\,s > \rho$. Allora*

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt = {}^*\!\!\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)\,dt \quad \textit{uniformemente in } K.$$

Dimostrazione. Basta trovare s_0, tale che $Re\,s_0 > \rho$ e α, $0 \leq \alpha < \pi/2$ tali che $K \subset S(s_0,\alpha)$. □

Teorema 1.9. *Sia f $\mathcal{L}$-trasformabile per $Re\,s > \rho$. Siano $s_0 \in \mathbb{C}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $Re\,s_0 > \rho$ e $0 \leq \alpha < \pi/2$. Allora*

$$\lim_{s\to\infty}\mathcal{L}[f](s) = 0, \qquad s \in S(s_0,\alpha). \tag{1.9}$$

(In particolare $\lim_{s\to+\infty}\mathcal{L}[f](s) = 0$*).*

Dimostrazione. Dal Lemma(1.3) segue che, fissato $\epsilon > 0$, esiste $T > 0$ tale che

$$\left|{}^*\!\!\int_T^{+\infty} e^{-st}f(t)\,dt\right| < \frac{\epsilon}{2} \qquad s \in S(s_0,\alpha).$$

Quindi per $s \in S(s_0,\alpha)$

$$\begin{aligned}|\mathcal{L}[f]| \leq \left|\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt\right| &+ \left|{}^*\!\!\int_T^{+\infty} e^{-st}f(t)\,dt\right| \\ &< \int_0^T e^{-Re\,s\,t}|f(t)|\,dt + \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Rimane da dimostrare che

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^T e^{-Re\,s\,t}|f(t)|\,dt = 0 \qquad s \in S(s_0,\alpha). \tag{1.10}$$

Dato che $Re\,s \to +\infty$, se $s \to \infty$ e $s \in S(s_0,\alpha)$, abbiamo

$$\lim_{s\to\infty} e^{-Re\,s\,t}|f(t)| = 0 \qquad \text{q.o. in } [0,T],\ s \in S(s_0,\alpha),$$

e
$$e^{-Re\,s\,t}|f(t)| \leq |f(t)| \in L^1[0,T].$$
Ora, applicando il teorema di Lebesgue sul passaggio al limite sotto il segno di integrale, otteniamo la (1.10). □

Teorema 1.10. *Sia f $\mathcal{L}$-trasformabile per $Re\,s > \rho$, sia $\sigma > \rho$, chiamiamo Π_σ il semipiano definito da $Re\,s \geq \sigma$, allora*
$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s) = 0 \qquad s \in \Pi_\sigma. \tag{1.11}$$

1.4 Olomorfia della trasformata

Lemma 1.4. *Sia $f \in L^1_{loc}([0,+\infty[)$. La funzione*
$$F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt \qquad s \in \mathbb{C} \tag{1.12}$$
è, per ogni fissato $T > 0$, una funzione intera e risulta
$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^T e^{-st} t^n f(t)\,dt \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.13}$$

Dimostrazione. Proviamo che la funzione $F(s)$ è olomorfa. Posto $s = x + iy$ verifichiamo che in $\mathbb{C}$ si ha
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{i}\frac{\partial F}{\partial y}.$$
Sia $s^* \in \mathbb{C}$ e $B_1(s^*) = \{s \in \mathbb{C} : |s - s^*| < 1\}$, la funzione e^{-st} è limitata nell'insieme $[0,T] \times B_1(s^*)$ e quindi
$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(e^{-st}f(t))\right| \leq \sup_{[0,T]\times B_1(s^*)} |e^{-st}||tf(t)| \in L^1([0,T]).$$
Allora possiamo applicare il teorema di derivazione sotto il segno di integrale e otteniamo
$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\int_0^T e^{-st} t f(t)\,dt \qquad s \in B_1(s^*)$$
e questa derivata è continua. In modo analogo si dimostra che
$$\frac{\partial F}{\partial y} = -i\int_0^T e^{-st} t f(t)\,dt \qquad s \in B_1(s^*).$$
La funzione F è dunque olomorfa in $B_1(s^*)$, e quindi in $\mathbb{C}$ per l'arbitrarietà di s^*, e risulta
$$F'(s) = -\int_0^T e^{-st} t f(t)\,dt.$$
Applicando iterativamente il ragionamento appena fatto si ottiene la (1.13). □

Teorema 1.11. *Sia f $\mathcal{L}$-trasformabile per $Re\, s > \rho$. La funzione $\mathcal{L}[f](s)$ è olomorfa nel semipiano di convergenza $Re\, s > \rho$ e vale la formula*

$$D^{(n)}\mathcal{L}[f](s) = (-1)^n \overset{*}{\int_0^{+\infty}} e^{-st} t^n f(t)\, dt = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f](s) \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.14}$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione ci serviamo del seguente teorema di Weierstrass:
Sia $H(s, \lambda)$ una funzione di variabile complessa $s \in \Omega$, aperto di $\mathbb{C}$, e di un parametro reale $\lambda \in I$. Sia λ_0 un punto di accumulazione al finito o all'infinito per I. Supponiamo che per ogni $\lambda \in I$, $H(s, \lambda)$ sia una funzione olomorfa in Ω. Inoltre per ogni $s \in \Omega$ sia

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} H(s, \lambda) = h(s)$$

e la convergenza sia uniforme al variare di s in un qualsiasi insieme chiuso e limitato contenuto in Ω. Allora $h(s)$ è olomorfa e

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} D_s^k H(s, \lambda) = h^{(k)}(s) \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Posto

$$H(s, T) = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$$

per ogni s tale che $Re\, s > \rho$ si ha

$$\mathcal{L}[f](s) = \lim_{T \to +\infty} H(s, T). \tag{1.15}$$

La funzione $H(s, T)$ è intera per il Lemma (1.4) ed in particolare olomorfa per $Re\, s > \rho$, inoltre per il Teorema (1.8) la convergenza in (1.15) è uniforme in ogni compatto contenuto nel semipiano di convergenza. Per il teorema di Weierstrass la funzione $\mathcal{L}[f](s)$ è olomorfa in Ω e

$$D^n \mathcal{L}[f](s) = \lim_{T \to +\infty} D_s^{(n)} H(s, T)$$

$$= \lim_{T \to +\infty} (-1)^n \int_0^T e^{-st} t^n f(t)\, dt = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f](s).$$

□

1.5 La trasformata e la convoluzione

La trasformata della convoluzione di due funzioni è uno strumento importante per la risoluzione di equazioni differenziali non omogenee.

Definizione 1.2. *Siano* $f,\, g \in L^1_{loc}([0,+\infty[)$, $f(t) = g(t) \equiv 0$ *in* $]-\infty, 0[$. *Definiamo la convoluzione di* f *e* g *come*

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau. \tag{1.16}$$

Vediamo alcune proprietà della convoluzione.

Teorema 1.12. *Siano* $f(f),\, g(t) \in L^1_{loc}([0,+\infty[)$, $f(t) = g(t) \equiv 0$ *in* $]-\infty, 0[$ *, allora per quasi tutti i valori di* $t \geq 0$ *esiste finita la convoluzione* (1.16) *che risulta essere una funzione localmente sommabile in* $[0,+\infty[$.

Dimostrazione. Fissato $T > 0$, dimostriamo che la funzione $f(\tau)g(t-\tau)$ è sommabile nel compatto

$$D = \{(\tau, t) \,:\, 0 \leq \tau \leq T\,,\, \tau \leq t \leq T\} = \{(\tau, t) \,:\, 0 \leq t \leq T\,,\, 0 \leq \tau \leq t\,,\,\}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\int_0^T d\tau \int_\tau^T |f(\tau)g(t-\tau)|\; dt &= \int_0^T |f(\tau)|\; d\tau \int_\tau^T |g(t-\tau)|\; dt \\ &\leq \int_0^T |f(\tau)|\; d\tau \int_0^T |g(x)|\; dx < +\infty.\end{aligned}$$

Applicando il teorema di Fubini allora, per quasi tutti i valori di $t \in [0,T]$, esiste finito l'integrale

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

e risulta $(f * g)(t) \in L^1([0,T])$, dato che

$$\int_0^T (f * g)(t)\,dt = \iint_D f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau dt.$$

□

Per la convoluzione valgono anche le seguenti proprietà:

$$f * g = g * f \qquad \text{(proprietà commutativa)}$$

$$(f * g) * h = f * (g * h) \qquad \text{(proprietà associativa).}$$

Teorema 1.13. *Se* $f(t)$ *è* $\mathcal{L}$*-trasformabile per* $Re\, s > \rho_1$ *e* $g(t)$ *è* $\mathcal{L}$*-trasformabile per* $Re\, s > \rho_2$*, allora* $f * g$ *è* $\mathcal{L}$*-trasformabile per* $Re\, s > \max(\rho_1, \rho_2)$ *e*

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]. \tag{1.17}$$

Dimostrazione. Prendiamo la trasformata di Laplace dell'integrale di convoluzione, che è una funzione di t, e otteniamo

$$\mathcal{L}[f * g] = \overset{*}{\int_0^{+\infty}} e^{-st} \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau\, dt.$$

Dato che e^{-st} è indipendente da τ può essere portata dentro l'integrale

$$\mathcal{L}[f * g] = \overset{*}{\int_0^{+\infty}} \int_0^t e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau\, dt.$$

Notiamo che il dominio di integrazione è una regione triangolare delimitata dalle rette $\tau = 0$ e $\tau = t$. Scambiando l'ordine di integrazione otteniamo

$$\mathcal{L}[f * g] = \overset{*}{\int_{\tau=0}^{\tau=+\infty}} \int_{t=\tau}^{+\infty} e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\, dt\, d\tau.$$

Con il cambio di variabile $z = t - \tau$ abbiamo

$$\mathcal{L}[f * g] = \overset{*}{\int_0^{+\infty}} f(\tau) \overset{*}{\int_0^{+\infty}} e^{-s(z+\tau)} g(z)\, dz\, d\tau,$$

e quindi

$$\mathcal{L}[f * g] = \overset{*}{\int_{\tau=0}^{+\infty}} f(\tau) e^{-s\tau}\, d\tau \overset{*}{\int_{z=0}^{+\infty}} e^{-sz} g(z)\, dz = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g].$$

□

Vediamo ora come si trova la trasformata di una funzione integrale utilizzando la convoluzione

Teorema 1.14. *Sia f una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile per $Re\, s > \rho$, allora la funzione*

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

è assolutamente $\mathcal{L}$-trasformabile almeno per $Re\, s > \max(0, \rho)$ e si ha

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s). \tag{1.18}$$

Dimostrazione. Riscriviamo

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau = (f * H)(t).$$

La funzione $H(t)$ è assolutamente $\mathcal{L}$-trasformabile per $Re\, s > 0$ e $\mathcal{L}[H] = 1/s$. Applicando il teorema precedente abbiamo che la funzione $\int_0^t f(\tau)\, d\tau$ è

$\mathcal{L}$-trasformabile per $Re\, s > \max(0,\rho)$ e vale la (1.18). Proviamo che, fissato s con $Re\, s > \max(0,\rho)$, si ha

$$e^{-st}\int_0^t f(\tau)\,d\tau \in L^1([0,+\infty[). \tag{1.19}$$

Fissato s_0 reale, $\max(0,\rho) < s_0 < Re\, s$, abbiamo

$$\left|e^{-st}\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right| = e^{-Re(s-s_0)t}\cdot e^{-s_0 t}\left|\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right|.$$

Quindi affinché valga la (1.18), dobbiamo dimostrare che la funzione

$$e^{-s_0 t}\int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

è limitata. Posto

$$\Phi_0(t) = \int_0^t e^{-s_0\tau} f(\tau)\,d\tau,$$

abbiamo, come nella (1.1),

$$\begin{aligned}\left|e^{-s_0 t}\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right| &= \left|e^{-s_0 t}\int_0^t e^{s_0\tau}e^{-s_0\tau}f(\tau)\,d\tau\right| \\ &= \left|e^{-s_0 t}\left[e^{s_0 t}\Phi_0(t) - s_0\int_0^t e^{s_0\tau}\Phi_0(\tau)\,d\tau\right]\right| \\ \le \sup_{\mathbb{R}}|\Phi_0(t)| + e^{-s_0 t}s_0&\left(\sup_{\mathbb{R}}|\Phi_0(t)|\right)\int_0^t e^{s_0\tau}\,d\tau \\ &\le 2\sup_{\mathbb{R}}|\Phi_0(t)|.\end{aligned}$$

□

L'ascissa di convergenza della trasformata della funzione $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ può essere minore del $\max(0,\rho)$, vediamone un esempio.

Esempio 1.5. *Consideriamo la funzione*

$$f(t) = e^t\cos(\pi e^t)H(t).$$

L'ascissa di convergenza di $\mathcal{L}[f]$ *è* 0. *Infatti per* $Re\, s > 0$ *integrando per parti si ha*

$$\mathcal{L}[f] = \lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-st}e^t\cos(\pi e^t)\,dt$$

$$= \lim_{T\to+\infty}\int_1^{e^T}\frac{\cos(\pi x)}{x^s}\,dx = \frac{s}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\sin(\pi x)}{x^{s+1}}\,dx.$$

Mentre

$$\int_0^t e^\tau\cos(\pi e^\tau)\,d\tau = \frac{1}{\pi}\sin(\pi e^t)$$

e l'ascissa di convergenza della trasformata della funzione $\sin(\pi e^t)$ *è* -1. *Infatti per* $Re\, s > -1$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right] = \lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-st}\sin(\pi e^t)\, dt$$

$$= \lim_{T\to+\infty}\int_1^{e^T}\frac{\sin(\pi x)}{x^{s+1}}\, dx = -\frac{1}{\pi} - \frac{s+1}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\cos(\pi x)}{x^{s+2}}\, dx.$$

1.6 Inversione della trasformata

Per utilizzare al meglio la trasformata di Laplace dobbiamo sapere anche come invertirla, cioè come determinare la funzione $f(t)$ la cui trasformata è una funzione $F(s)$ data. Chiamiamo $f(t)$ *antitrasformata* di $F(s)$ e la indichiamo con $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$. Vedremo che la formula per trovare l'antitrasformata coinvolge un integrale complesso. Per ora consideriamo il caso in cui si riesca a riconoscere la funzione $f(t)$ dalla forma di $F(s)$.

Teorema 1.15 (Linearità)**.** *L'antitrasformata di Laplace è lineare.*

Dimostrazione. Sfruttiamo la proprietà di linearità della trasformata:

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha\mathcal{L}[f(t)] + \beta\mathcal{L}[g(t)].$$

Applicando $\mathcal{L}^{-1}$ da entrambe le parti otteniamo :

$$\alpha f(t) + \beta g(t) = \mathcal{L}^{-1}[\alpha\mathcal{L}[f(t)] + \beta\mathcal{L}[g(t)]].$$

Possiamo scrivere $f(t)$ come $\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f(t)]]$, e in modo simile $g(t)$. Quindi

$$\alpha\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f(t)]] + \beta\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[g(t)]] = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[\alpha f(t)] + \beta\mathcal{L}[g(t)]].$$

Posto $F(s) = \mathcal{L}[f]$ e $G(s) = \mathcal{L}[g]$

$$\alpha\mathcal{L}^{-1}[F] + \beta\mathcal{L}^{-1}[G] = \mathcal{L}^{-1}[\alpha F + \beta G].$$

□

Esempio 1.6. *Consideriamo* $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-5s+6}\right]$, *che può essere riscritta come*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s-3)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-3}\right]$$

$$= -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] = -e^{2t} + e^{3t}$$

Osservazione 1.3. *Possiamo invertire l'operazione di trasformata usando la trasformata di funzioni note solo perché l'operazione è una bigezione. Per ogni funzione* $f(t)$ *la trasformata di Laplace* $\mathcal{L}[f(t)]$ *è unicamente definita e viceversa. È una conseguenza immediata del teorema di Lerch.*

Esempio 1.7. *Applichiamo il secondo teorema di shifting per calcolare*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{3s}}{s^3}\right].$$

Sappiamo che $\mathcal{L}\left[t^2\right] = \frac{2}{s^3}$, *e allora per il secondo teorema di shifting abbiamo che*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{3s}}{s^3}\right] = \frac{1}{2}H(t-3)(t-3)^2$$

Abbiamo visto che la convoluzione di due funzioni soddisfa la proprietà

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g],$$

da questa si ottiene la seguente proprietà dell'antitrasformata:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] * \mathcal{L}^{-1}[G(s)].$$

Vediamo un esempio

Esempio 1.8. *Consideriamo la funzione trasformata* $F(s) = \frac{1}{(s-2)(s-3)}$. *Questa ha due componenti facilmente riconoscibili*

$$\frac{1}{s-2} = \mathcal{L}[e^{2t}] \quad e \quad \frac{1}{s-3} = \mathcal{L}[e^{3t}].$$

Allora

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s-3)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] = e^{2t} * e^{3t}.$$

Adesso calcoliamo l'integrale di convoluzione

$$e^{2t} * e^{3t} = \int_{\tau=0}^{t} e^{2\tau}e^{3(t-\tau)}\,d\tau = e^{3t}\int_{\tau=0}^{t} e^{\tau}\,d\tau$$

$$= e^{3t}[-e^{-\tau}]_0^t = e^{3t}(-e^{-t}+1) = -e^{2t} + e^{3t}.$$

Questo è lo stesso risultato che avremmo ottenuto sfruttando

$$\frac{1}{(s-2)(s-3)} = -\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-3}.$$

Molte trasformate di Laplace possono essere invertite sfruttando le trasformate di poche funzioni comuni, la linearità della trasformata e il primo e il secondo teorema di shifting. Ma queste tecniche sono spesso inadeguate per invertire le trasformate che si trovano nella risoluzione di problemi complicati, ad esempio le equazioni differenziali alle derivate parziali. Ci serve una formula per l'inversione, la ricaviamo utilizzando in modo "informale" l'integrale di Fourier.

Sia $g(t)$ una funzione di ordine esponenziale, e sia γ il più piccolo numero reale tale che $e^{-\gamma t}g(t)$ è limitato per $t \to +\infty$. Allora per quello che abbiamo visto, $g(t)$ ha trasformata di Laplace $G(s)$, che esiste quando $Re\, s > \gamma$. Ora definiamo $h(t) = e^{-\gamma t}g(t)H(t)$. Dato che $h(t)$ è limitato per $t \to +\infty$ l'integrale di Fourier esiste e abbiamo che

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikt}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikT}h(T)\,dT\,dk,$$

e quindi

$$e^{-\gamma t}g(t) = \frac{1}{2\pi}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikt}\int_{0}^{+\infty} e^{-(\gamma-ik)T}g(T)\,dT\,dk.$$

Se adesso applichiamo il cambio di variabile $s = \gamma - ik$, $ds = -i\,dk$, troviamo[1]

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\,\text{v.p.}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}{}^{*}\!\int_{0}^{+\infty} e^{-sT}g(T)\,dT\,ds.$$

Infine dalla definizione di trasformata di Laplace arriviamo alla formula di inversione, chiamata *inversione integrale di Bromwich*

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\,\text{v.p.}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}G(s)\,ds. \tag{1.20}$$

Notiamo che il bordo di integrazione è una linea verticale nel piano complesso. Dato che l'esistenza di $G(s)$ è garantita solo quando $Re\, s > \gamma$, questo bordo si trova a destra di tutte singolarità di $G(s)$. Spesso è possibile semplificare la (1.20) scegliendo come contorno di integrazione un grande semicerchio nella metà sinistra del piano. Quando il bordo può essere scelto in questo modo, il risultato dipende dai poli della funzione $e^{st}G(s)$.

Esempio 1.9. *Sia $G(s) = \frac{\beta}{s-\alpha}$. Risolviamo l'integrale*

$$I(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{st}\frac{\beta}{s-\alpha}\,ds,$$

dove C è la linea chiusa della Figura (1.1).
Per il teorema dei residui $I(t)$ è uguale alla somma di tutti i poli di $e^{st}G(s)$ contenuti in C. Supponiamo che C contenga il polo semplice $s = \alpha$ e quindi che il segmento contenuto in C si trovi a destra del polo $s = \alpha$. Allora applicando il teorema dei residui $I(t) = \beta e^{\alpha t}$. Quando $b \to +\infty$ la parte semicircolare del dominio cresce e, dato che $|G(s)|$ è algebricamente piccolo quando $|s| \gg 1$, allora per il lemma di Jordan l'integrale lungo il semicerchio tende a zero. Sul segmento contenuto in C, quando $b \to +\infty$ troviamo l'integrale (1.20)*, quindi $I(t) = g(t)$ e la trasformata inversa è $g(t) = \beta e^{\alpha t}$.*

[1] qui procediamo in modo "informale" perché non abbiamo dimostrato che questo cambio di variabile è possibile nel bordo del dominio di integrazione.

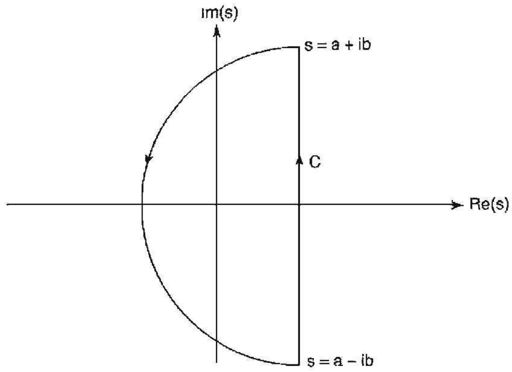

Figura 1.1: Contorno del dominio di integrazione.

Esempio 1.10. *Cerchiamo l'antitrasformata della funzione*

$$G(s) = e^{-\alpha s^{1/2}}/s.$$

Dato che $G(s)$ *contiene una potenza razionale,* $s^{1/2}$*, il punto* $s = 0$ *è un branch point. Cioè è un punto il cui argomento complesso può essere mandato da un singolo punto del dominio in più punti dell'immagine, in pratica se poniamo* $s = e^{i\theta}$ *con* $\theta = 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$*, abbiamo che* $G(e^{i0}) = e^{-\alpha}$*, e* $G(e^{i2\pi}) = e^{\alpha}$*. È necessario introdurre una linea di taglio affinché la funzione* $G(s)$ *ammetta un valore univocamente determinato quando* $s = 0$*. Mettiamo la linea di taglio lungo l'asse reale negativo in modo che, se* $s = |s|e^{i\theta}$ *con* $-\pi < \theta < \pi$*,* $s^{1/2} = \sqrt{|s|}e^{i\theta/2}$ *e la parte reale di* $s^{1/2}$ *sia positiva. Integriamo* $e^{st}G(s)$ *lungo il contorno* C_B *mostrato nella Figura (1.2), che non attraversa la linea di taglio.*

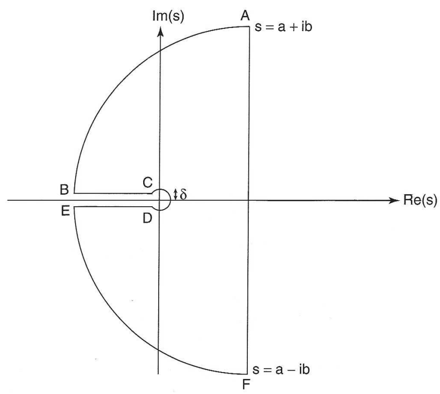

Figura 1.2: Il contorno C_B usato per invertire la trasformata di Laplace con una linea di taglio lungo l'asse reale negativo.

Questo contorno include anche una piccola circonferenza intorno all'origine *di centro ϵ. Dato che la funzione $e^{st}G(s)$ è analitica dentro C_B, per il teorema di Cauchy l'integrale lungo C_B è uguale a zero. Sugli archi circolari AB e EF, $G(s) \to 0$ esponenzialmente quando $b \to +\infty$, perché la parte reale di $s^{1/2}$ è positiva, e quindi l'integrale calcolato lungo questi archi è nullo. Come nell'esempio precedente, l'integrale lungo la linea AF tende a $g(t)$ quando $b \to +\infty$, e ritroviamo la formula di inversione (1.20). Concludiamo che*

$$g(t) = -\lim_{\substack{b\to+\infty \\ \epsilon\to 0}} \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DE}\right\} \frac{e^{st-\alpha s^{1/2}}}{s}\, ds. \tag{1.21}$$

Consideriamo i contributi delle linee BC e DE, parametrizziamo queste linee con $s = xe^{\pm i\pi}$ rispettivamente. In questo modo siamo sicuri di prendere il corretto valore di $s^{1/2}$ su ciascun lato della linea di taglio. Lungo BC, $s^{1/2} = x^{1/2}e^{i\pi/2} = ix^{1/2}$ e quindi quando $\epsilon \to 0$ e $b \to +\infty$

$$\int_{BC} \frac{e^{st-\alpha s^{1/2}}}{s}\, ds = \lim_{b\to+\infty}\int_b^0 \frac{e^{-xt-\alpha i x^{1/2}}}{x}\, dx.$$

Similmente

$$\int_{DE} \frac{e^{st-\alpha s^{1/2}}}{s}\, ds = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{e^{-xt+\alpha i x^{1/2}}}{x}\, dx.$$

Quindi

$$\left\{\int_{BC} + \int_{DE}\right\} \frac{e^{st-\alpha s^{1/2}}}{s}\, ds = 2i\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{e^{-xt}\sin\alpha x^{1/2}}{x}\, dx. \tag{1.22}$$

Per risolvere l'integrale, usiamo lo sviluppo in serie di Taylor di $\sin\alpha x^{1/2}$, e abbiamo che

$$I = {}^*\!\!\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin\alpha x^{1/2}}{x}\, dx = {}^*\!\!\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\alpha x^{1/2})^{2n-1}}{(2n-1)!}\, dx.$$

Dato che la serie è uniformemente convergente per ogni x, possiamo scambiare la somma con l'integrale

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha^{2n-1}}{(2n-1)!}\,{}^*\!\!\int_0^{+\infty} e^{-xt}x^{n-3/2}\, dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha^{2n-1}}{(2n-1)!}\frac{1}{t^{n-1/2}}\,{}^*\!\!\int_0^{+\infty} e^{-X}X^{n-3/2}\, dX \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\alpha}{t^{1/2}}\right)^{2n-1}\frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{(2n-1)!}, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il cambio di variabile $X = xt$. Adesso da

$$\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)$$

$$= \left(n - \frac{3}{2}\right)\left(n - \frac{5}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1\cdot\sqrt{\pi},$$

troviamo che

$$\frac{\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)}{(2n-1)!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-1}}\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{(2n-1)(2n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-1}(2n-1)}\frac{1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2(n-1)}(2n-1)(n-1)!},$$

e quindi

$$I = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\alpha}{2t^{1/2}}\right)^{2n-1}\frac{\sqrt{\pi}}{(2n-1)(n-1)!} = 2\sqrt{\pi}\int_0^{\frac{\alpha}{2}t^{1/2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(s^2)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds$$

$$= 2\sqrt{\pi}\int_0^{\frac{\alpha}{2}t^{1/2}} e^{-s^2}\,ds = \pi\,\mathrm{erf}\left(\frac{\alpha}{2t^{1/2}}\right),$$

dove $\mathrm{erf}(x)$ *è la funzione errore, definita da*

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-q^2}\,dq.$$

Possiamo parametrizzare il piccolo cerchio CD *usando* $s = \epsilon e^{i\theta}$, *dove* θ *varia da* π *a* $-\pi$. *Su questa curva abbiamo* $s^{1/2} = \epsilon^{1/2}e^{i\theta/2}$, *e*

$$\int_{CD}\frac{e^{st-\alpha s^{1/2}}}{s}\,ds = \int_{\pi}^{-\pi}\frac{e^{\epsilon te^{i\theta}-\alpha\epsilon^{1/2}e^{i\theta/2}}}{\epsilon e^{i\theta}}i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta = \int_{\pi}^{-\pi} e^{\epsilon te^{i\theta}-\alpha\epsilon^{1/2}e^{i\theta/2}}i\,d\theta.$$

Per $\epsilon \to 0$ *otteniamo*

$$\int_{CD}\frac{e^{st-\alpha s^{1/2}}}{s}\,ds = \int_{\pi}^{-\pi} i\,d\theta = -2\pi i. \tag{1.23}$$

Usando le (1.22) *e* (1.23) *in* (1.21) *concludiamo che*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\alpha s^{1/2}}}{s}\right] = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\alpha}{2t^{1/2}}\right) = \mathrm{erfc}\left(\frac{\alpha}{2t^{1/2}}\right),$$

dove $\mathrm{erfc}(x)$ *è la funzione errore complementare, definita da*

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-q^2}\,dq,$$

Le trasformate di Laplace delle funzioni errore e errore complementare si trovano molto spesso quando si risolvono problemi di diffusione, ne vedremo un esempio.

Si può dimostrare che la formula (1.20) vale in generale per $g \in L^1_{loc}([0, +\infty[)$, $g(t) \equiv 0$ per $t < 0$ e supponendo che g sia assolutamente $\mathcal{L}$-trasformabile per $Re\, s > \rho$.

Teorema 1.16. *Supponiamo che f sia $\mathcal{L}$-trasformabile per $Re\, s > \rho$, si ha*

$$f(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi i}\text{v.p.}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)\, ds \qquad q.o. \ in \quad \mathbb{R}. \tag{1.24}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione integrale

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau,$$

questa è a variazione limitata in ogni intervallo compatto e, per il Teorema (1.14), assolutamente $\mathcal{L}$-trasformabile per $Re\, s > \max(0, \rho)$, quindi per la (1.20) abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^t f(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2\pi i}\text{ v.p.}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right](s)\, ds \\ = \frac{1}{2\pi i}\text{ v.p.}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)\, ds.\end{aligned}$$

□

Teorema 1.17. *Siano f e g $\mathcal{L}$-trasformabili per $Re\, s > \rho$ e*

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g].$$

Allora $f = g$ q.o. in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Basta osservare che $\mathcal{L}[f - g] = 0$ e applicare la formula (1.24) alla funzione $f - g$. □

Esempio 1.11. *La funzione e^{-s}, $Re\, s > 0$ verifica le condizioni dei teoremi (1.9) e (1.10). ma non è antitrasformabile. Infatti se lo fosse dovrebbe esistere una funzione $f \in L^1_{loc}([0, +\infty[)$, $f(t) \equiv 0$ per $t < 0$, tale che $\mathcal{L}[f(t)](s) = e^{-s}$. Allora derivando la trasformata si avrebbe $\mathcal{L}[tf(t)](s) = e^{-s}$ e quindi $f(t) = tf(t)$ quasi ovunque in $\mathbb{R}$, da cui $f = 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}$. Ma questo è assurdo perché allora si dovrebbe avere $\mathcal{L}[f(t)](s) = 0$.*

Siano $F(s)$ e $G(s)$ antitrasformabili allora valgono le proprietà:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s - \alpha)](t) = e^{\alpha t}\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) \qquad \alpha \in \mathbb{C};$$

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)](t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t - a)H(t - a) \qquad a \geq 0;$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(cs)](t) = \frac{1}{c}\mathcal{L}^{-1}[F(s)]\left(\frac{t}{c}\right) \qquad c > 0.$$

Una importante famiglia di funzioni antitrasformabili è costituita dalle funzioni razionali proprie, cioè dalle funzioni del tipo

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \qquad P(s),\, Q(s) \quad \text{polinomi di grado } m{,}n \text{ rispettivamente con } m < n.$$

Infatti, detti α_j, $j = 1, \dots r$ gli zeri di $Q(s)$ di molteplicità n_j rispettivamente $(n_1 + n_2 + \cdots n_r = n)$, abbiamo

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{p=1}^{n_j} \frac{A_{jp}}{(s-\alpha_j)^p}$$

e quindi

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right](t) = \left(\sum_{j=1}^{r} \sum_{p=1}^{n_j} \frac{A_{jp}}{(p-1)!} t^{p-1} e^{\alpha_j t} \right) H(t). \tag{1.25}$$

Le costanti A_{jp} possono essere determinate con le formule

$$A_{jp} = \frac{1}{(n_j - p)!} \lim_{s \to \alpha_j} D^{n_j - p}(s-\alpha_j)^{n_j} \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad j = 1, \dots, r,\ p = 1, \dots, n_j.$$

Se gli zeri sono tutti semplici

$$A_{j1} = \lim_{s \to \alpha_j} (s-\alpha_j) \frac{P(s)}{Q(s)} = \lim_{s \to \alpha_j} \frac{s - \alpha_j}{Q(s) - Q(\alpha_j)} P(s) = \frac{P(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)} \qquad j = 1, \dots, n.$$

Quindi la (1.25) diventa

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right](t) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{P(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)} e^{\alpha_j t} \right) H(t).$$

Capitolo 2

Applicazioni della trasformata

2.1 La trasformata e le equazioni differenziali

In questo paragrafo vediamo come si può risolvere un'equazione differenziale con la trasformata di Laplace. Per prima cosa calcoliamo la trasformata di Laplace della derivata di una funzione f. Supponiamo che $f(t)$ sia localmente sommabile in $[0, +\infty[$ e nulla per $t < 0$. Allora $f'(t)$ esiste q.o. per il teorema di derivazione di Lebesgue. Supponiamo $f'(t)$ $\mathcal{L}$-trasformabile per $Re\, s > \rho$, allora per definizione

$$\mathcal{L}[f'] = {}^{*}\!\!\int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)\, dt.$$

Dopo aver integrato per parti troviamo

$$\mathcal{L}[f'] = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^{+\infty} - {}^{*}\!\!\int_0^{+\infty} -se^{-st} f(t)\, dt.$$

Qui supponiamo che i valori di s siano tali che $e^{-st} f(t) \to 0$ per $t \to +\infty$, questo significa che

$$\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - f(0). \tag{2.1}$$

e per il Teorema (1.14) $f(t)$ è assolutamente $\mathcal{L}$-trasformabile almeno per $Re\, s > \max(0, \rho)$.

Osservazione 2.1. *Se* $g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$ *è tale che* $g'(t) = f(t)$, *tranne dove* f *è discontinua, dalla* (2.1) abbiamo $\mathcal{L}[f] = s\mathcal{L}[g] - g(0)$. Dato che $g(0) = 0$ per definizione,

$$\mathcal{L}[g] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f],$$

e quindi

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}F(s)\right] = \int_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

Questo può essere utile per invertire la trasformata di Laplace, per esempio, di $F(s) = \frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$. Sappiamo che $\frac{1}{\omega}\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{1}{s^2+\omega^2}$, e quindi

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+\omega^2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right]\right] \\ &= \int_0^t \frac{1}{\omega}\sin\omega\tau\, d\tau = \frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t) \end{aligned}$$

Adesso cerchiamo di risolvere l'equazione differenziabile

$$\frac{dy}{dt} - 2y = 0,$$

con condizione iniziale $y(0) = 1$. Iniziamo applicando la trasformata di Laplace dell'equazione differenziale

$$\mathcal{L}[\frac{dy}{dt}] - 2\mathcal{L}[y] = sY(s) - y(0) - 2Y(s) = 0,$$

dove $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$. Usando la condizione iniziale otteniamo:

$$Y(s) = \frac{1}{s-2},$$

che è facilmente invertibile e dà $y(t) = e^{2t}$.

Solitamente le equazioni differenziali che cercheremo di risolvere saranno del secondo ordine, quindi abbiamo bisogno di determinare $\mathcal{L}[f'']$. Supponiamo come prima $f(t)$ localmente sommabile in $[0,+\infty[$ e nulla per $t < 0$, derivabile e f' localmente assolutamente continua in $[0,+\infty[$. Allora la derivata seconda esiste q.o. per il teorema di derivazione di Lebesgue. Se f'' è $\mathcal{L}$-trasformabile per $Re\, s > \rho$, allora f è assolutamente $\mathcal{L}$-trasformabile almeno per $Re\, s > \max(0,\rho)$ e

$$\mathcal{L}[f''] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Infatti se introduciamo la funzione $g(t) = f'(t)$, la (2.1) mostra che

$$\mathcal{L}[g'] = sG(s) - g(0),$$

dove $G(s) = \mathcal{L}[g] = \mathcal{L}[f'] = F(s) - f(0)$, concludiamo che

$$\mathcal{L}[f''] = \mathcal{L}[g'] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0), \tag{2.2}$$

e f è assolutamente $\mathcal{L}$-trasformabile almeno per $Re\, s > \max(0,\rho)$ per il Teorema (1.14). Possiamo ottenere lo stesso risultato integrando $\mathcal{L}[f'']$ per parti due volte.

In generale supponiamo f derivabile $n-1$ volte, e che queste derivate siano localmente assolutamente continue in $[0,+\infty[$. Allora, se la derivata n-esima, che esiste q.o. per il teorema di derivazione di Lebesgue, è $\mathcal{L}$-trasformabile per $Re\, s > \rho$, allora f è assolutamente $\mathcal{L}$-trasformabile almeno per $Re\, s > \max(0,\rho)$, e per induzione si dimostra che

$$\mathcal{L}[f^{(n)}] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

Esempio 2.1. *Utilizziamo la trasformata di Laplace per risolvere l'equazione differenziale*

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0$$

soggetta alle condizioni iniziali $y(0) = 0 \quad e \quad y'(0) = 1$. *Troviamo che*

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 5(sY(s) - y(0)) + 6Y = 0.$$

Con le condizioni iniziali otteniamo

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - 5s + 6},$$

che può essere riscritta come

$$Y(s) = \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-2},$$

e quindi $y(t) = e^{3t} - e^{2t}$.

Esempio 2.2. *Cerchiamo la soluzione del sistema di equazioni*

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} + y_1 = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} - y_2 = y_1 \end{cases}$$

con condizioni iniziali $y_1(0) = y_2(0) = 1$. *Risolviamo il sistema usando la trasformata di Laplace. Le trasformate delle due equazioni sono:*

$$sY_1 - 1 + Y_1 = Y_2, \quad sY_2 - 1 - Y_2 = Y_1,$$

dove $\mathcal{L}[y_j(t)] = Y_j(s)$. *La soluzione di queste equazioni algebriche è*

$$Y_1(s) = \frac{s}{s^2 - 2}, \quad Y_2(s) = \frac{s+2}{s^2 - 2}.$$

Ora invertendo la trasformata troviamo

$$y_1(t) = \cosh\sqrt{2}t, \quad y_2(t) = \cosh\sqrt{2}t + \sqrt{2}\sinh\sqrt{2}t.$$

2.1.1 Equazioni differenziali non omogenee

Utilizzare la trasformata di Laplace è conveniente per risolvere un'equazione differenziale non omogenea, per esempio

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = \delta(t-1),$$

dove $\delta(t-1)$ è la delta di Dirac. Per trovare la trasformata di quest'equazione abbiamo bisogno della trasformata di $\delta(t-a)$, la calcoliamo:

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] \overset{*}{=} \int_0^{+\infty} \delta(t-a)e^{-st}\,dt = e^{-sa}.$$

L'equazione differenziale diventa:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + sY(s) - y(0) = e^{-s},$$

e quindi

$$Y(s) = \frac{e^{-s} + (s+1)y(0) + y'(0)}{s(s+1)}.$$

Notiamo che

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1,$$

allora per il primo teorema di shifting

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = e^{-t}.$$

questo significa che

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] = 1 - e^{-t},$$

e applicando il secondo teorema di shifting abbiamo che

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\right] = H(t-1)(1 - e^{-(t-1)}).$$

Combinando tutti questi risultati concludiamo che

$$y(t) = y(0) + y'(0)(1 - e^{-t}) + H(t-1)(1 - e^{-(t-1)}).$$

2.2 La trasformata e l'equazione integrale di Volterra

Cerchiamo la trasformata di Laplace dell'equazione integrale di Volterra

$$y(t) = f(t) + \int_0^t y(\tau)K(t-\tau)\,d\tau \qquad \text{per } t > 0. \tag{2.3}$$

La funzione K si chiama nucleo dell'equazione. Se pensiamo che t sia la variabile temporale, l'integrale rappresenta la storia della soluzione. L'integrale è un prodotto di convoluzione, riscriviamo la (2.3) come

$$y = f + y * K.$$

Adesso consideriamo la trasformata di Laplace e otteniamo

$$Y = F + \mathcal{L}[y * K] = F + Y\mathcal{L}[K].$$

Quindi

$$Y = \frac{F}{1 - \mathcal{L}[K]},$$

dove $F(s) = \mathcal{L}[f]$ e $Y = \mathcal{L}[y]$.
Vediamo un esempio

Esempio 2.3. *Risolviamo*

$$y(t) = 1 + \int_0^t (t-\tau)y(\tau)\,d\tau,$$

qui $f(t) = 1$ *e* $K(t) = t$*, e quindi*

$$Y(s) = \frac{s}{s^2-1}.$$

Allora la soluzione è $y(t) = \cosh t$*.*

2.3 La trasformata e i fluidi viscosi

Consideriamo il flusso bidimensionale di un fluido viscoso, e supponiamo che il fluido, inizialmente in quiete, riceva una spinta improvvisa causata dal movimento di una piastra piana posta nello stesso piano.
Usiamo le coordinate Cartesiane, prendiamo l'asse x che giace nel piano della piastra e l'asse y orientato verso il fluido. Allora nel sistema di coordinate che stiamo considerando la piastra riceve una spinta improvvisa nella direzione x di velocità costante $\mathcal{U}$.
Questo è un flusso unidimensionale con velocità $u(x, y, t)$ diretta lungo l'asse x e campo di pressione scalare $\mathrm{p}(x, y, t)$.
Dall' equazione di continuità, si dimostra che la velocità del flusso u, è una funzione di y e t. Il fluido immediatamente sopra un livello $y = costante$ esercita uno stress, cioè una forza per unità di area di contatto, sul fluido immediatamente sotto e viceversa. Per un fluido viscoso la componente tangenziale τ è diversa da zero. Per i fluidi viscosi $\tau \propto du/dy$, cioè

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \tag{2.4}$$

dove μ è chiamato coefficiente di viscosità.
Si chiama viscosità cinematica la quantità $\nu = \mu/\rho$, dove ρ è la densità del fluido. I valori di ν relativi a fluidi estremamente viscosi sono molto alti, come ad esempio la lava e il catrame, mentre quelli con una bassa viscosità comprendono acqua, aria e gas inerti. Per esempio la viscosità cinematica della lava è circa $10m^2s^{-1}$, mentre i corrispondenti valori per l'aria e per l'acqua, a temperatura e pressione ambiente, sono $10^{-6}m^2s^{-1}$ e $1.5\times10^{-5}m^2s^{-1}$ rispettivamente. Notiamo che gli ultimi due sono molto simili.

Per semplicità supponiamo ρ, μ e ν costanti. Il fluido viscoso che stiamo considerando si muove con velocità $u = u(y, t)$ lungo l'asse x, allora l'equazione $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ è automaticamente soddisfatta, perché u è indipendente da x. In assenza di gravità il movimento del fluido è governato dall'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{2.5}$$

e $\partial \mathrm{p}/\partial y = 0$. Quindi la pressione p è soltanto una funzione di x e t. Dalla (2.5) si vede che $\partial \mathrm{p}/\partial x$ è uguale alla differenza di due termini che sono indipendenti da x, allora $\partial \mathrm{p}/\partial x$ è soltanto una funzione di t.
In assenza di forze viscose avremmo

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x}. \tag{2.6}$$

Vediamo come si deduce quest'ultima equazione, la (2.5) si dimostra in modo simile. Prendiamo un elemento di fluido di forma rettangolare nel piano $x\,y$ di lati δx e δy, come nella Figura (2.1). Consideriamo la differenza di pressione sull'elemento lungo la direzione x e otteniamo

$$\mathrm{p}(x)\delta y - \mathrm{p}(x+\delta x)\delta y = -\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x}\delta x \delta y + \dots,$$

e questa è uguale al prodotto della massa e dell'accelerazione dell'elemento di fluido. L'accelerazione

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x},$$

si riduce semplicemente a $\partial u/\partial t$ perché u è indipendente da x. Da questo deduciamo che la (2.6) vale.

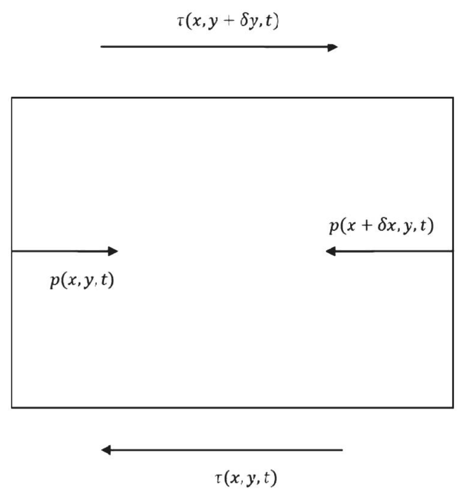

Figura 2.1: Un piccolo elemento di fluido di forma rettangolare.

Supponiamo che non ci sia nessuna pressione applicata dall'esterno, quindi che la pressione in $x = \pm\infty$ sia uguale, e quindi $\partial \mathrm{p}/\partial x$ è indipendente da x. Da questo segue che $\partial \mathrm{p}/\partial x = 0$. La velocità $u(y,t)$ soddisfa l'equazione di diffusione unidimensionale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{2.7}$$

con condizione iniziale

$$u(y,0) = 0, \qquad \text{per } y > 0, \tag{2.8}$$

e condizioni al contorno

$$u(0,t) = \mathcal{U} \qquad t > 0, \tag{2.9}$$

$$u(y,t) \to 0 \quad \text{per} \quad t > 0 \quad \text{e} \quad y \to +\infty. \tag{2.10}$$

Questo problema è conosciuto come *problema di Rayleigh*. Per risolvere questo problema con valori al contorno, iniziamo dalla trasformata di Laplace della velocità u rispetto al tempo

$$\mathcal{L}[u(y,t)] = U(y,s) = {}^{*}\!\!\int_0^{+\infty} e^{-st} u(y,t)\, dt.$$

Derivando due volte rispetto a y troviamo che

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

In generale le derivate rispetto a y non sono condizionate dalla trasformata di Laplace rispetto a t. Applicando la (2.1) a $\partial u/\partial t$ la (2.7) diventa

$$sU = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}. \tag{2.11}$$

La variabile della trasformata appare soltanto come parametro in quest'equazione, quindi la soluzione è

$$U(y,s) = A(s) e^{s^{1/2} \frac{y}{\nu^{1/2}}} + B(s) e^{-s^{1/2} \frac{y}{\nu^{1/2}}}. \tag{2.12}$$

Dato che $u \to 0$ quando $y \to +\infty$, anche $U \to 0$ per $y \to +\infty$, e quindi $A(s) = 0$. Adesso consideriamo la trasformata della condizione al contorno (2.9), e otteniamo

$$U(0,s) = {}^{*}\!\!\int_0^{+\infty} u(0,t) e^{-st}\, dt = {}^{*}\!\!\int_0^{+\infty} \mathcal{U} e^{-st}\, dt = \frac{\mathcal{U}}{s},$$

e quindi $B(s) = \mathcal{U}/s$. Concludiamo che

$$U(y,s) = \frac{\mathcal{U}}{s} e^{-s^{1/2} \frac{y}{\nu^{1/2}}}.$$

Utilizzando la funzione errore complementare $\mathrm{erfc}(x)$ troviamo che

$$u(y,t) = \mathcal{U}\mathrm{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right).$$

Alcune velocità tipo sono mostrate nella Figura (2.2), queste sono facili da disegnare perché le funzioni errore e errore complementare sono le funzioni `erf` e `erfc` di MATLAB.

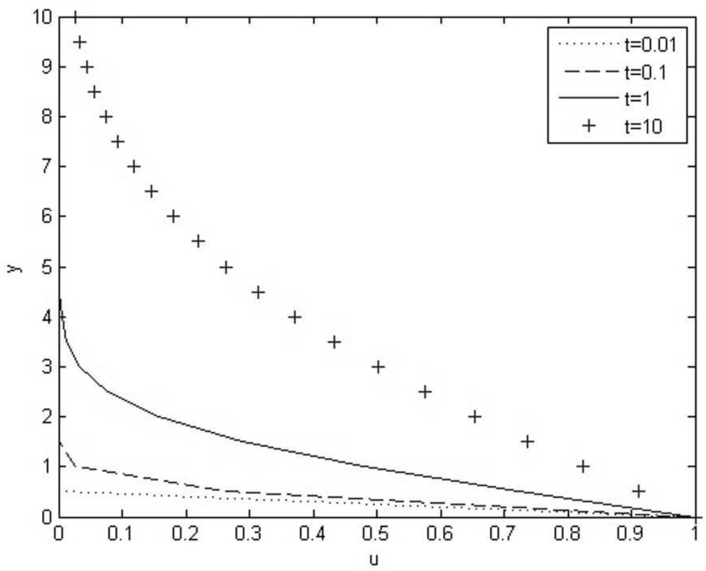

Figura 2.2: Le velocità del flusso quando $\mathcal{U} = 1$ e $\nu = 1$.

Osserviamo che nel caso in cui la velocità della piastra sia una funzione del tempo il problema si complica. Infatti la condizione a contorno (2.9) diventa

$$u(0,t) = \mathcal{U} f(t), \qquad \text{per } t > 0.$$

2.4 Circuito RLC

Risolviamo il problema con cui abbiamo iniziato. Prendiamo un circuito RLC con resistenza, capacità e induttanza disposte in serie. L'equazione differenziale associata al circuito che avevamo ricavato era

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = e,$$

ora supponiamo $e = 0$ e che le condizioni iniziali siano $v(0) = v'(0) = 1$. Applicando la trasformata di Laplace abbiamo

$$LC\left(s^2\, V(s) - sv(0) - v'(0)\right) + RC\left(s\, V(s) - v(0)\right) + V(s) = 0,$$

dove $V(s) = \mathcal{L}[v]$. Questa con le condizioni iniziali diventa

$$LC\left(s^2 V(s) - s - 1\right) + RC\left(s V(s) - 1)\right) + V(s) = 0,$$

e quindi

$$V(s) = \frac{LC\, s + RC + LC}{LC\, s^2 + RC\, s + 1} = \frac{s + \frac{R}{L} + 1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}.$$

Adesso fissiamo l'attenzione su

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0,$$

abbiamo tre possibili casi:

- $CR^2 > 4L$,
- $CR^2 = 4L$,
- $CR^2 < 4L$.

Nel primo caso

$$V(s) = \frac{\left(s + \frac{R}{L} + 1\right)}{\left(s + \frac{R}{2L} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{CR^2-4L}{L^2C}}\right)\left(s + \frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{CR^2-4L}{L^2C}}\right)}$$

$$= \frac{1}{s + \frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{CR^2-4L}{L^2C}}} + \frac{\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{CR^2-4L}{L^2C}}}{\left(s + \frac{R}{2L} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{CR^2-4L}{L^2C}}\right)\left(s + \frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{CR^2-4L}{L^2C}}\right)}$$

$$= \frac{1}{s + \frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{CR^2-4L}{L^2C}}} + \frac{\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{CR^2-4L}{L^2C}}}{sqrt\frac{CR^2-4L}{L^2C}} \times$$

$$\left(\frac{1}{s + \frac{R}{2L} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{CR^2-4L}{L^2C}}} - \frac{1}{s + \frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{CR^2-4L}{L^2C}}}\right) .$$

Allora

$$v(t) = e^{-\left(\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{CR^2-4L}{L^2C}}\right)t} + \frac{\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{CR^2-4L}{L^2C}}}{\sqrt{\frac{CR^2-4L}{L^2C}}} \times$$

$$\left(e^{\left(-\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{CR^2-4L}{L^2C}}\right)t} - e^{-\left(\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{CR^2-4L}{L^2C}}\right)t}\right).$$

fisicamente si ha uno smorzamento senza oscillazione.
Nel secondo caso

$$V(s) = \frac{1}{s + \frac{R}{2L}} + \frac{\frac{R}{2L} + 1}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2},$$

quindi

$$v(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}\left(1 + \left(\frac{R}{2L} + 1\right)\frac{t}{2}\right),$$

e l'andamento di $v(t)$ è come nel caso precedente.
Nel terzo caso, prendiamo

$$s^2 + \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = \left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{4L - R^2C}{4L^2C}.$$

Allora

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{s + \frac{R}{L} + 1}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{4L-R^2C}{4L^2C}} \\ &= \frac{s + \frac{R}{2L}}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{4L-R^2C}{4L^2C}} + \frac{1 + \frac{R}{2L}}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{4L-R^2C}{4L^2C}}, \end{aligned}$$

quindi

$$v(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}\left[\cos\sqrt{\frac{4L - R^2C}{4L^2C}}t + \frac{1 + \frac{R}{2L}}{\sqrt{\frac{4L-R^2C}{4L^2C}}}\sin\sqrt{\frac{4L - R^2C}{4L^2C}}t\right],$$

e se $R \ll 2\sqrt{\frac{L}{5C}}$, $v(t)$ compie oscillazioni smorzate intorno al valore zero dipendenti dal valore della resistenza.

Bibliografia

[1] Giuseppe di Fazio, Michele Frasca (2003), *Metodi Matematici per l'ingegneria*, Mundozzi Editore.

[2] A.C. King, J. Billingham, S.R. Otto (2003), *Differential equation*, Cambridge.

[3] Achenson D. J. (1990), *Elementary Fluid Dynamics*, Oxford University Press.

Sitografia

[1] http://mathworld.wolfram.com.

[2] http://www.britannica.com/EBchecked/topic/289633/integral-transform.