Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Gruppi Ciclici e Melodie Autosimili

candidata: **Roberta Di Franco** relatore: **Lucio Cadeddu**

Definizione di Gruppo

Si definisce gruppo la coppia $(G, \cdot)$ dove G è un insieme detto supporto del gruppo, "$\cdot$" è un'operazione binaria:

$$G \times G \to G$$

$$(a, b) \mapsto a \cdot b$$

- Rispetta la proprietà associativa:

$$\forall a, b, c \in G \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

- Esiste un elemento neutro, indicato generalmente con 1 tale che:

$$\forall a \in G \qquad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

- Esiste l'elemento inverso, indicato con x' tale che:

$$\forall a \in G \qquad a \cdot x' = x' \cdot a = 1$$

Ulteriori definizioni sui gruppi

- **Gruppo Abeliano:** un gruppo si definisce Abeliano quando rispetta anche la proprietà commutativa.

Ulteriori definizioni sui gruppi

- **Gruppo Abeliano:** un gruppo si definisce Abeliano quando rispetta anche la proprietà commutativa.
- **Ordine del Gruppo:** si dice ordine di un gruppo G la sua cardinalità e si indica con $|G|$. Un gruppo si dice finito se il suo ordine appartiene a $\mathbb{N}$.

Ulteriori definizioni sui gruppi

- **Gruppo Abeliano:** un gruppo si definisce Abeliano quando rispetta anche la proprietà commutativa.
- **Ordine del Gruppo:** si dice ordine di un gruppo G la sua cardinalità e si indica con $|G|$. Un gruppo si dice finito se il suo ordine appartiene a $\mathbb{N}$.
- **Sottogruppo:** un sottoinsieme non vuoto H di un gruppo G si definisce sottogruppo se:

  •$\forall x, y \in H \Rightarrow xy \in H$

  •$x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$

Gruppo Ciclico

- Un gruppo generato da un solo elemento si definisce ciclico.

Gruppo Ciclico

- **Un gruppo generato da un solo elemento si definisce ciclico.**
- Ogni sottogruppo di un gruppo ciclico è ciclico

Gruppo Ciclico

- **Un gruppo generato da un solo elemento si definisce ciclico.**
- Ogni sottogruppo di un gruppo ciclico è ciclico
- Il sottogruppo generato da qualche elemento g di un gruppo G è denotato da $<g>$.

Azione di un gruppo

Sia G un gruppo e A un insieme. Si definisce **azione di un gruppo** (G-azione) una funzione:

$$G \times A \to A$$

$$(g, a) \mapsto g \cdot a$$

Che verifica:

$$\forall a \in A \qquad 1_G \cdot a = a$$

$$\forall g, h \in G; \forall a \in A \qquad g \cdot (h \cdot a) = (g \cdot h) \cdot a$$

Quest'ultima proprietà non va confusa con quella associativa che è definita per tutti gli elementi di uno stesso insieme, mentre g, h e a appartengono a insiemi diversi.

Orbita di un gruppo

Data una relazione di equivalenza su A:

$$x, y \in A, \qquad x \sim y \qquad se \qquad \exists g \in G \qquad t.c. \qquad y = g \cdot x$$

Le classi di equivalenza così definite prendono il nome di **orbite**.
Le orbite formano una partizione dell'insieme A.
Indichiamo nel seguente modo l'orbita contenente l'elemento x:

$$O(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

Melodie periodiche e Autosimilarità

- Una melodia si definisce **periodica** quando, dopo un certo intervallo di tempo (periodo), si ripete uguale:

$$\forall k \in \mathbb{Z}_n, \qquad M_{k+n} = M_k$$

Così M_k è ben definita per ogni $k \in \mathbb{Z}_n$.

Melodie periodiche e Autosimilarità

- Una melodia si definisce **periodica** quando, dopo un certo intervallo di tempo (periodo), si ripete uguale:

$$\forall k \in \mathbb{Z}_n, \qquad M_{k+n} = M_k$$

  Così M_k è ben definita per ogni $k \in \mathbb{Z}_n$.

- Un oggetto si dice **autosimile** se è simile a una o più sue parti in modo omotetico, cioè possono essere contratte o estese.
  L'autosimilarità è una proprietà tipica dei frattali.

Melodie Autosimili con Rapporto a

Sia M una melodia periodica n: $M_0,\ldots,M_n{=}M_0$, $M_{n+1} = M_1, \ldots$ dove i valori M_k sono eventi musicali (ad esempio battiti su una tastiera) e k è qualche misura del tempo. **M è autosimile con rapporto a** $\in \mathbb{N}$ se e solo se

$$\forall k \in \mathbb{Z}_n \qquad M_{a^k} = M_k$$

Questo significa che prendendo una nota ogni battito a produce:

- La stessa melodia ma più lenta o più veloce

Melodie Autosimili con Rapporto a

Sia M una melodia periodica n: $M_0,\ldots,M_n{=}M_0$, $M_{n+1} = M_1, \ldots$ dove i valori M_k sono eventi musicali (ad esempio battiti su una tastiera) e k è qualche misura del tempo. **M è autosimile con rapporto a** $\in \mathbb{N}$ se e solo se

$$\forall k \in \mathbb{Z}_n \qquad M_{a^k} = M_k$$

Questo significa che prendendo una nota ogni battito a produce:

- La stessa melodia ma più lenta o più veloce
- La stessa velocità ma la melodia risulta aumentata o diminuita

Teorema

Ogni melodia autosimile con rapporto a e periodo n, è costruita da orbite di applicazioni affini $x \mapsto a \cdot x \bmod n$. Denotando le orbite di x come:

$$O_x = \left\{ a^k x \bmod n, k \in \mathbb{Z} \right\} = a^{\mathbb{Z}} x$$

per ogni nota p della melodia, il sottoinsieme di indice $M^{-1}(p) = \{i \in \mathbb{Z}_n, M_i = p\}$ è una tale orbita o un'unione di queste.

Dim: E' sufficiente provare che se $M_x = p$ allora $M_k = p \; \forall k \in O_k$, quindi ogni orbita deriverà interamente per una data nota. Ma questo è ovvio dalla definizione:

$$M_k = M_{a^m x} = M_{a^{m-1} x} = ... = M_x = p$$

Esempio

Prendiamo una melodia astratta a rapporto 3 modulo 8. Avrà 5 orbite:

$$\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

- Per $x = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \mathbf{(0)}$ è una orbita

Esempio

Prendiamo una melodia astratta a rapporto 3 modulo 8. Avrà 5 orbite:

$$\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

- Per $x = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \mathbf{(0)}$ è una orbita
- Per $x = 1 \Rightarrow 3 \cdot 1 = 3 \to 3 \mid 8$ dà resto 3

Esempio

Prendiamo una melodia astratta a rapporto 3 modulo 8. Avrà 5 orbite:

$$\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

- Per $x = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ **(0)** è una orbita
- Per $x = 1 \Rightarrow 3 \cdot 1 = 3 \rightarrow 3 \mid 8$ dà resto 3
- Per $x = 3 \Rightarrow 3 \cdot 3 = 9 \rightarrow 9 \mid 8$ dà resto 1
  in questo senso 1 va in 3 e 3 va in 1, quindi **(1 3)** è una orbita

Esempio

Prendiamo una melodia astratta a rapporto 3 modulo 8. Avrà 5 orbite:

$$\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

- Per $x = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ **(0)** è una orbita
- Per $x = 1 \Rightarrow 3 \cdot 1 = 3 \rightarrow 3 \mid 8$ dà resto 3
- Per $x = 3 \Rightarrow 3 \cdot 3 = 9 \rightarrow 9 \mid 8$ dà resto 1
  in questo senso 1 va in 3 e 3 va in 1, quindi **(1 3)** è una orbita
- Per $x = 2 \Rightarrow 3 \cdot 2 = 6 \rightarrow 6 \mid 8$ dà resto 6

Esempio

Prendiamo una melodia astratta a rapporto 3 modulo 8. Avrà 5 orbite:

$$\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

- Per $x = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ **(0)** è una orbita
- Per $x = 1 \Rightarrow 3 \cdot 1 = 3 \rightarrow 3 \mid 8$ dà resto 3
- Per $x = 3 \Rightarrow 3 \cdot 3 = 9 \rightarrow 9 \mid 8$ dà resto 1
  in questo senso 1 va in 3 e 3 va in 1, quindi **(1 3)** è una orbita
- Per $x = 2 \Rightarrow 3 \cdot 2 = 6 \rightarrow 6 \mid 8$ dà resto 6
- Per $x = 6 \Rightarrow 3 \cdot 6 = 18 \rightarrow 18 \mid 8$ dà resto 2
  quindi **(2 6)** è una orbita

Esempio

Prendiamo una melodia astratta a rapporto 3 modulo 8. Avrà 5 orbite:

$$\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

- Per $x = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ **(0)** è una orbita
- Per $x = 1 \Rightarrow 3 \cdot 1 = 3 \rightarrow 3 \mid 8$ dà resto 3
- Per $x = 3 \Rightarrow 3 \cdot 3 = 9 \rightarrow 9 \mid 8$ dà resto 1
  in questo senso 1 va in 3 e 3 va in 1, quindi **(1 3)** è una orbita
- Per $x = 2 \Rightarrow 3 \cdot 2 = 6 \rightarrow 6 \mid 8$ dà resto 6
- Per $x = 6 \Rightarrow 3 \cdot 6 = 18 \rightarrow 18 \mid 8$ dà resto 2
  quindi **(2 6)** è una orbita
- Per $x = 4 \Rightarrow 3 \cdot 4 = 12 \rightarrow 12 \mid 8$ dà resto 4 e **(4)** è una orbita

Esempio

Prendiamo una melodia astratta a rapporto 3 modulo 8. Avrà 5 orbite:

$$\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

- Per $x = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ **(0)** è una orbita
- Per $x = 1 \Rightarrow 3 \cdot 1 = 3 \rightarrow 3 \mid 8$ dà resto 3
- Per $x = 3 \Rightarrow 3 \cdot 3 = 9 \rightarrow 9 \mid 8$ dà resto 1
  in questo senso 1 va in 3 e 3 va in 1, quindi **(1 3)** è una orbita
- Per $x = 2 \Rightarrow 3 \cdot 2 = 6 \rightarrow 6 \mid 8$ dà resto 6
- Per $x = 6 \Rightarrow 3 \cdot 6 = 18 \rightarrow 18 \mid 8$ dà resto 2
  quindi **(2 6)** è una orbita
- Per $x = 4 \Rightarrow 3 \cdot 4 = 12 \rightarrow 12 \mid 8$ dà resto 4 e **(4)** è una orbita
- Per $x = 5 \Rightarrow 3 \cdot 5 = 15 \rightarrow 15 \mid 8$ dà resto 7

Esempio

Prendiamo una melodia astratta a rapporto 3 modulo 8. Avrà 5 orbite:

$$\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

- Per $x = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ **(0)** è una orbita
- Per $x = 1 \Rightarrow 3 \cdot 1 = 3 \rightarrow 3 \mid 8$ dà resto 3
- Per $x = 3 \Rightarrow 3 \cdot 3 = 9 \rightarrow 9 \mid 8$ dà resto 1
  in questo senso 1 va in 3 e 3 va in 1, quindi **(1 3)** è una orbita
- Per $x = 2 \Rightarrow 3 \cdot 2 = 6 \rightarrow 6 \mid 8$ dà resto 6
- Per $x = 6 \Rightarrow 3 \cdot 6 = 18 \rightarrow 18 \mid 8$ dà resto 2
  quindi **(2 6)** è una orbita
- Per $x = 4 \Rightarrow 3 \cdot 4 = 12 \rightarrow 12 \mid 8$ dà resto 4 e **(4)** è una orbita
- Per $x = 5 \Rightarrow 3 \cdot 5 = 15 \rightarrow 15 \mid 8$ dà resto 7
- Per $x = 7 \Rightarrow 3 \cdot 7 = 21 \rightarrow 21 \mid 8$ dà resto 5
  quindi **(5 7)** è una orbita

Basso Albertino

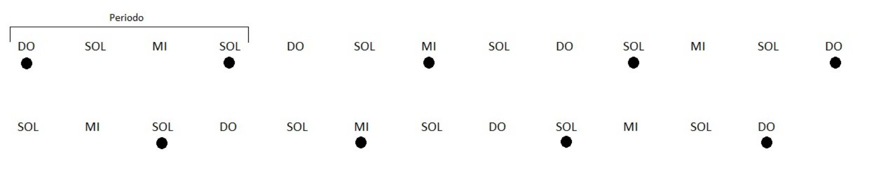
Il **Basso Albertino** è un particolare tipo di accompagnamento, spesso usato in epoca classica e talvolta in quella romantica. Il nome deriva dal compositore Domenico Alberti (1710–1740), il quale lo utilizzò ampiamente nelle sue opere, anche se non fu il primo ad usarlo. E' una sorta di "accordo spezzato" o accompagnamento arpeggiato, contribuisce a creare un sottofondo liscio, sostenuto e scorrevole. Si può presentare anche in altre forme.

Basso Albertino

Play Play

Basso Albertino

Il Basso Albertino è un perfetto esempio di melodia autosimile con meno di 5 note e le stesse note sono usate per differenti orbite. Prendiamo il più tipico Basso Albertino: DO-SOL-MI-SOL con periodo n=4, autosimile con rapporto a=3:



Melodia Autosimile Primitiva

Una melodia è detta **autosimile primitiva** se è generata da un rapporto a e un modulo n con differenti note per differenti orbite. In altre parole ci sono tante diverse note quanto possibile per ogni n, a.

Proposizione 1

Un'orbita ha una sola nota: $O_0 = (0)$. Tutte le altre condividono la stessa cardinalità, che è l'ordine moltiplicativo di a:

$$O(a) = |O_1| = |\left\{a^k \text{ mod } n, k \in \mathbb{Z}\right\}| = min\left\{k > 0, a^k = 1 \text{ mod } n\right\}$$

Dim: L'orbita di 1 è esattamente il sottogruppo di $\mathbb{Z}_n$ generato da a, cioè tutte le diverse potenze di a mod n: quindi $|O_1| = o(a)$.
Sia $x \neq 0$, ora l'applicazione $y \mapsto y \cdot x$ è biettiva (poichè x deve essere invertibile, essendo $\mathbb{Z}_n$ un campo quando n è primo) e precisamente l'applicazione O_1 in O_x, quindi:
$|O_x| = |O_1| = o(a)$.

Proposizione 2

Per ogni periodo n>1, la "melodia":

$$xyyyyyyy\ldots xyyyyyyy\ldots$$

è autosimile (ma non primitiva) per ogni rapporto a coprimo con n.

Questo è ovvio perchè x è costruito sull'orbita di 0 e le y sono su tutte le unioni delle altre orbite, qualunque sia il valore di a. Di certo tale melodia, con una singola nota ripetuta su n-1 battute su n, sembra un poco semplice. In realtà ci sono diversi esempi come la seguente melodia autosimile con n=4 e a=3.

FINE

Grazie per l'attenzione