Universita' degli Studi di Cagliari
Facolta' di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Operazioni con le serie numeriche

Relatore Dott. Lucio Cadeddu.

Tesi di laurea di Veronica Cugusi

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini qualsiasi.

Definizione:

- ***Prodotto di una serie per un numero reale c :***

$$c\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \sum_{n=0}^{\infty} c a_n$$

- ***Somma di due serie:***

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

- ***Prodotto (secondo Cauchy) di due serie:***

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad \text{dove} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

cioè esplicitando:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0 \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ &\vdots \\ c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \end{aligned}$$

Cosa possiamo dire riguardo il carattere della serie prodotto per un numero reale e della serie somma?

I. Proposizione

Supponiamo $c \neq 0$, *se* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge con somma A allora la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} c a_n$ è *convergente con somma cA.*

II. Proposizione

Se le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *convergono, con somme A e B rispettivamente, allora la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ è *convergente con somma* $A + B$.

Teorema di Mertens

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *due serie convergenti, con somme A e B rispettivamente.*

Sia inoltre una delle due, diciamo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*, assolutamente convergente; allora la serie prodotto* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *è convergente con somma* $C = AB$.

Dimostrazione:

Siano A_n , B_n e C_n le ridotte n-esime delle serie $\sum a_n$, $\sum b_n$ e $\sum c_n$.

Si osserva che: $C_n = A_n B - a_0 R_n - a_1 R_{n-1} - \ldots - a_{n-1} R_1 - a_n R_0$,

dove $R_n = (B - B_n)$ è il resto n-esimo di $\sum b_n$.

Si mostra che: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \, R_{n-k} = 0$

Si pone per $n > K$: $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k R_{n-k}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-K} a_k R_{n-k} + \sum_{k=n-K+1}^{n} a_k R_{n-k}\right|$

Utilizzando la disuguaglianza triangolare, le opportune maggiorazioni e infine

sfruttando il criterio di Cauchy si ottiene la tesi:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k \, R_{n-k}\right| < \varepsilon\tilde{A} + \varepsilon L \, ;$$

dove $L = \max_{k \le K}\{|R_k|\}$ e $\tilde{A}$ è la somma della serie $\sum |a_k|$.

Proprietà associativa e commutativa delle serie numeriche

Problema: Tali proprietà continueranno a valere anche per somme infinite?

- ***Proprietà associativa***

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ \dots + a_n + \ \dots$$ e sia A_n la ridotta n-esima.

Associando, con una legge qualsiasi, gruppi di un numero finito di termini consecutivi di una serie regolare, si ottiene una nuova serie avente lo stesso carattere.

Detta $n_1, n_2, n_3, \dots$ una successione crescente di interi positivi, si considera la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = (a_0 + \ \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ \dots + a_{n_2}) + (a_{n_2+1} + \ \dots + a_{n_3}) + \ \dots$$

$\{B_n\}$ è una sottosuccessione di $\{A_n\}$, dove B_n è la ridotta n-esima di $\sum b_n$; se $\{A_n\}$ converge, $\{B_n\}$ convergerà allo stesso limite. Se $\{A_n\}$ diverge, divergerà anche $\{B_n\}$.

È importante osservare che la proprietà associativa non vale per le serie indeterminate.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ \dots \ ;$$

Primo raggruppamento:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ \dots \ = 0\ ;$$

Secondo raggruppamento:

$$1-(1-1)-(1-1)-\ \dots \ = 1\ ;$$

Nel 1703, il monaco Guido Grandi dimostrò che: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \frac{1}{2}$, utilizzando la serie

geometrica in modo errato. $\quad 1 + \mathrm{x} + \mathrm{x}^2 + \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^4 + \ \dots = \dfrac{1}{1-\mathrm{x}}$ (vera se $|\mathrm{x}| < 1$!);

sostituendo $\mathrm{x} = -1$ ottenne l'uguaglianza.

Inoltre Grandi pervenne a: $0 + 0 + 0 + \ \dots \ = \frac{1}{2}$ $(\textit{spiegazione dell'origine del mondo})$.

Matematici di rilievo come Bernoulli, Leibniz, Eulero accettarono che $\sum(-1)^n = \frac{1}{2}$ ma con diversa giustificazione.

Leibniz (probabilistica): interrompendo la somma ad un termine di posto qualsiasi, si ottiene 0 o 1 con la stessa probabilità; si considera quindi la media aritmetica $\frac{1}{2}$.

Solo nel XIX secolo, quando fu precisata la nozione di limite ad opera soprattutto di Bolzano, Cauchy e Weierstrass, ci si rese conto che $\sum(-1)^n$ non era convergente.

- ***Riordinamento di una serie***

Definizione: Diremo che una serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è un riordinamento della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ se esiste un applicazione biunivoca $j: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che: $b_n = a_{j(n)}$.

Problema: Il riordinamento di una serie avrà la stessa somma della serie di partenza?

Teorema di Dirichlet

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *una serie assolutamente convergente; allora ogni suo riordinamento è assolutamente convergente e ha la stessa somma.*

Teorema di Riemann-Dini

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *una serie convergente, ma non assolutamente convergente. Allora scelto comunque un numero* $S \in \mathbb{R}$*, esiste un riordinamento della serie data convergente con somma* S*. Esistono anche riordinamenti di* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *che sono divergenti, altri che sono indeterminati.*

Dimostrazione:

Si considerano: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$, dove $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$ e $a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$;

$\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} q_n$, dove $p_0, \dots, p_n, \dots$ sono i termini non negativi di $\sum a_n$ e $q_0, \dots, q_n, \dots$ quelli negativi.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ , \sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ sono divergenti a $+\infty$, mentre $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = +\infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} q_n = -\infty$.

Inoltre, per la convergenza di $\sum a_n$: $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$.

Dato $S \in \mathbb{R}$ si costruisce un riordinamento di $\sum a_n$:

Si sommano i termini positivi in modo da superare S, poi tutti quelli negativi necessari affinché la somma parziale sia minore di S e si itera tale procedura.

Da un certo punto in poi risulterà: $s_n - p_k \leq S \leq s_n - q_k$, dove p_k e q_k sono l'ultimo dei termini positivi e negativi considerati. Per $n \to \infty$ si ottiene la tesi.

Limite e sommabilità alla Cesàro

- Sia $\{a_n\}$ una successione a valori reali e $\{\alpha_n\}$ la successione delle medie aritmetiche:

$$\alpha_n = \frac{a_0 + a_1 + \ ... + \ a_n}{n+1}$$

Si dimostra: se $\{a_n\}$ è convergente allora anche $\{\alpha_n\}$ converge allo stesso limite.

Si definisce *limite alla Cesàro* e indica il limite della successione delle medie.

Esistono successioni indeterminate che, passando alle medie, sono trasformate in successioni convergenti.

Ad esempio, la corrispondente successione delle medie di $\{(-1)^n\}$ è:

$1\ ,0\ ,\frac{1}{3}\ ,0\ ,\frac{1}{5}\ ,0\ ,\frac{1}{7}\ ,\ ...$ il cui limite alla Cesàro è 0.

Data la successione $\{a_n\}$, si prende in considerazione la successione delle somme parziali $\{s_n\}$; si può passare alla successione delle medie σ_n:

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1}$$

Se $\{s_n\}$ è indeterminata, si può passare alla successione delle medie e vedere se questa converge.

Se ciò accade, si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è *sommabile secondo Cesàro*.

Ad esempio: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$;

La successione delle somme parziali è: $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$, mentre la successione $\{\sigma_n\}$ è:

$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \ldots$ che converge a $\frac{1}{2}$. La serie è sommabile alla Cesàro con somma $\frac{1}{2}$.

Teorema

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *due serie convergenti con somma A e B rispettivamente.*

Allora la serie prodotto alla Cauchy delle due serie date, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *, è sommabile alla Cesàro con somma AB.*

Ampliando così la classe delle serie convergenti, si perde però la proprietà associativa.

In conclusione si può affermare che: le usuali proprietà associativa e commutativa valgono per le serie assolutamente convergenti. Alcune di queste proprietà vengono meno passando alle serie convergenti e altre ancora si perdono se si considerano le serie sommabili alla Cesàro.

Applicazioni

Riguardante le serie numeriche è il *problema di Basilea*, famoso problema dell'analisi, risolto dal matematico Eulero nel 1735. Esso fu proposto per la prima volta nel 1644 da Pietro Mengoli e chiedeva la somma precisa a cui tende la serie infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ \dots$$

Eulero, con un procedimento nel quale suppose che le regole dei polinomi finiti fossero valide anche per le serie infinite (anche se ciò non fu giustificato), dimostrò che:

La somma esatta a cui tende la somma degli inversi di tutti i quadrati dei numeri naturali è: $\frac{\pi^2}{6}$, cioè in formule: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Dimostrazione:

- Si considera lo sviluppo in serie di Taylor del seno e si divide per x:

$$\frac{sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ ...; \quad \text{per } z = x^2: \quad \frac{sin(x)}{x} = 1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \ ...$$

π^2 , $4\pi^2$, $9\pi^2$, ... sono le radici di tale polinomio; Applicando le formule di Viéte:

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \ ...$$

Si conclude moltiplicando i due membri per π^2:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

• *Funzione zeta di Riemann*

È definita per ogni numero complesso $s \neq 1$ dalla serie:

$$\varsigma(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Tale serie converge per $Re(s) > 1$.

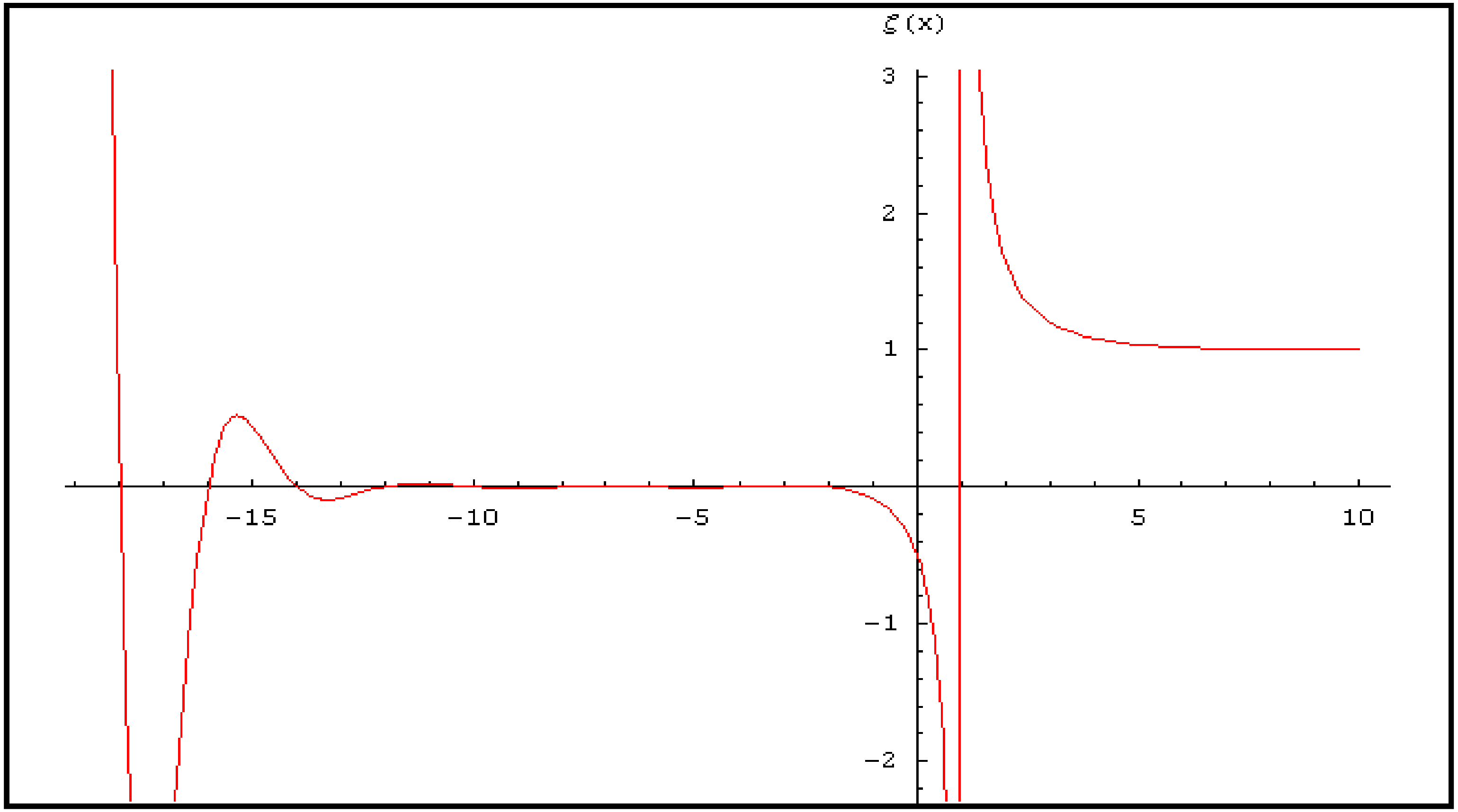
Riemann estese inizialmente tale definizione a tutti i numeri s tali che: $Re(s) < 0$;

e in seguito: $0 < Re(s) < 1$.

La funzione zeta di 1 è la serie armonica che sappiamo essere divergente:

$$\varsigma(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = +\infty$$

Grafico cartesiano della funzione zeta per i numeri reali tra $-18{,}5$ e 10.



• *Formula prodotto di Eulero*

Nel 1741 Eulero dimostrò il cosìdetto *Prodotto di Eulero*:

$$\varsigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

dove $\varsigma(s)$ è la funzione zeta di Riemann, mentre il prodotto corre su tutti i numeri primi p. È importante il collegamento tra una serie in cui compaiono tutti i numeri naturali e un prodotto in cui compaiono tutti i numeri primi.

Tramite questa formula è possibile fornire una dimostrazione dell'infinità dei numeri primi, basta porre $s = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-1}}$.

Dimostrazione:

Consideriamo la funzione zeta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ \dots \qquad (\mathbf{i})$$

Moltiplichiamo entrambi i termini per $\frac{1}{2^s}$, poi sottraiamo l'espressione così ottenuta alla (**i**):

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\varsigma(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \ \dots$$

Ripetendo gli stessi passaggi per il primo termine dopo l'uno avremo:

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\varsigma(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \ \dots$$

Iterando tale procedimento elimineremo tutti i multipli di ogni numero dopo l'uno:

$$\dots\left(1-\frac{1}{11^s}\right)\left(1-\frac{1}{7^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\varsigma(s)=1$$

I denominatori a sinistra dell'uguale saranno tutti primi, quindi in conclusione:

$$\varsigma(s)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3^s}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{5^s}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{7^s}\right)}\dots=\prod_p\frac{1}{(1-p^{-s})}$$

Il calcolo dei valori esatti della funzione zeta di Riemann è stato molto laborioso.

Eulero, procedendo in modo simile al caso $s = 2$, riuscì a trovare la formula esatta per la somma dell'inverso di qualsiasi potenza pari.

$$\varsigma(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}645$$

$$\varsigma(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90} \approx 1{,}0823$$

$$\varsigma(6) = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \ldots = \frac{\pi^6}{945} \approx 1{,}0173$$

Generalizzando: $$\varsigma(2k) = \frac{2^{2k-1}\pi^{2k}|B_{2k}|}{(2k)!}$$

dove B_k è il $\mathrm{k-esimo}$ numero di Bernoulli.

Cosa possiamo dire invece riguardo i valori dispari di s?

Al 2010 non si conosce ancora una formula esatta per i valori dispari di $\varsigma(s)$, si conoscono solo i valori approssimati.

$$\varsigma(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ \dots \ \approx \ 1{,}202$$

$$\varsigma(5) = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \ \dots \ \approx \ 1{,}0369$$

$$\varsigma(7) = 1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \ \dots \ \approx \ 1{,}0083$$

Nel 1978 Roger Apéry riuscì a provare che $\varsigma(3)$ è un numero irrazionale; questo risultato prende il nome di *Teorema di Apéry* e $\varsigma(3)$ di *costante di Apéry*.