



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

APPLICAZIONE DELLE EDP AL CORRETTO DIMENSIONAMENTO

DI UNA CANTINA VINICOLA

Relatore
Prof. Lucio Cadeddu

Tesi di laurea di
Alessandra Cauli

Anno Accademico 2009/2010

Indice

Introduzione	4
Capitolo 1	6
Le equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine	
1.1 Classificazione delle equazioni lineari del secondo ordine alle derivate parziali	6
1.2 Classificazione delle equazioni puntuali	12
1.3 Superfici caratteristiche	14
1.4 Forma canonica delle equazioni del secondo ordine a due variabili indipendenti	16
1.5 Classificazione dei problemi al contorno	22
1.6 Problema di Cauchy	25
1.7 Il ruolo delle caratteristiche nell'impostazione del problema di Cauchy	26
1.8 Problema al contorno per le equazioni di tipo ellittico	27
Capitolo 2	29
L'equazione del calore	
2.1 L'equazione del calore	29
2.2 Equazione non omogenea	39
2.3 L'equazione di diffusione	39
2.4 Equazione stazionaria	41
2.5 L'equazione di trasporto	41
2.6 Soluzione fondamentale dell'equazione del calore	43
2.7 Problema misto per l'equazione del calore	44

Capitolo 3	46
Il problema del corretto dimensionamento di una cantina vinicola	
3.1 Le condizioni ideali per la conservazione di un vino	46
3.2 L'influenza del flusso di calore nell'equazione della temperatura	52
3.3 La profondità ottimale per una cantina vinicola	55
3.4 L'equazione della temperatura alla profondità ottimale	58
3.5 Studio qualitativo della profondità di una cantina vinicola in base al periodo di riferimento scelto e alle condizioni del suolo al variare della temperatura	59
Conclusione	65
Bibliografia	66

Introduzione

Le equazioni differenziali sono strumenti matematici fondamentali per la modellizzazione di fenomeni di natura fisica, biologica, chimica, finanziaria, ecc. E' quindi importante saper risolvere le equazioni e i sistemi di equazioni differenziali che modellizzano il problema.

La procedura di modellizzazione si articola in varie fasi:

- inizialmente si introducono opportune **variabili di stato**, che descrivono appunto lo stato del sistema in ogni istante, ad esempio posizione e velocità per un punto materiale ad ogni istante, lo stato di deformazione per un corpo elastico, il numero di individui in un modello di popolazione, la concentrazione in un sistema chimico;
- si identificano poi le cosiddette **variabili di processo**, che descrivono le interazioni tra i vari elementi del sistema e l'esterno: ad esempio flussi e termini di sorgente per sistemi biologici, termini di reazione per sistemi chimici;
- la terza fase consiste nella formulazione di opportune **equazioni di bilancio**, che determinano in maniera precisa il modo in cui le variabili di processo interagiscono tra di loro: ad esempio le leggi di bilancio della quantità di moto, della massa, ecc.;
- la quarta fase consiste nella scelta di **relazioni costitutive** opportune, che determinano come le variabili di processo dipendono dalle variabili di stato.

Inserendo le relazioni costitutive nelle equazioni di bilancio si ottengono infine equazioni differenziali in termini delle variabili di stato, che rappresentano il culmine del processo di modellizzazione che descrive il fenomeno.

Una volta determinato il sistema di equazioni differenziali, detto il **modello** del fenomeno, è necessario studiare le sue soluzioni, qualitativamente o quantitativamente, per analizzare il loro comportamento e confrontarlo con quello del fenomeno reale.

Osserviamo che:

- (i) ogni termine che compare nell'equazione differenziale che descrive il fenomeno è frutto di una scelta precisa di variabili di stato, di equazioni di bilancio, e soprattutto di relazioni costitutive;
- (ii) ogni termine che compare nell'equazione differenziale ha conseguenze sul comportamento qualitativo delle soluzioni.

E' importante mettere in evidenza le relazioni tra (i) e (ii).

In questa tesi, considereremo una particolare applicazione modellizzata tramite un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine che rientra nella classe di equazioni nota come *equazione del calore*.

L'obiettivo è di risolvere questa equazione per ricavare la profondità ottimale di una cantina vinicola scelta per la conservazione di un buon vino, in modo da minimizzare le oscillazioni della temperatura che ne disturbano il corretto invecchiamento.

Per studiare correttamente l'equazione del calore e trovare l'espressione della funzione temperatura in dipendenza della profondità e del tempo, occorre tener conto dell'anomalia che emerge nella funzione temperatura dovuta al flusso di calore attraverso la superficie esterna della cantina. Quest'anomalia si traduce in una differenza di fase fra le due equazioni d'onda della temperatura e del flusso di calore.

Troveremo che la profondità ottimale è legata esclusivamente alla frequenza di variazione della temperatura ω che dipende quindi dal periodo scelto per l'invecchiamento del vino e da una costante positiva κ che descrive le caratteristiche termiche del suolo in cui è ubicata la cantina.

Al variare di questi due parametri, si può quindi studiare quale sia effettivamente la profondità ottimale per una cantina vinicola, adattandola alle condizioni climatiche e del suolo di cui si dispone.

Capitolo 1

Le equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine

1.1 Classificazione delle equazioni lineari del secondo ordine alle derivate parziali

Ricordiamo che, nelle equazioni differenziali ordinarie, la funzione incognita dipende da una sola variabile indipendente, mentre un'**equazione differenziale alle derivate parziali** o più semplicemente un'**equazione alle derivate parziali (EDP)** è un'equazione la cui incognita è una funzione di due o più variabili indipendenti. Nel caso di due variabili indipendenti (x, y) deve comparire nell'equazione almeno una derivata parziale seconda della funzione incognita $z = z(x, y)$.

Indicando con $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i punti di \mathbb{R}^n e con t il tempo, consideriamo funzioni reali di $n + 1$ variabili $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$, con \mathbf{x} che varia in un aperto Ω di \mathbb{R}^n e t che varia in un intervallo I di \mathbb{R}^+ .

Un'**equazione differenziale alle derivate parziali di ordine n** nell'incognita $\phi(\mathbf{x}, t)$ è quindi un'espressione della forma

$$F(\mathbf{x}, t, \phi, \phi_t, \nabla\phi, \dots) = 0 \quad (1.1.1)$$

che coinvolge \mathbf{x} , t , ϕ e le sue derivate parziali fino all'ordine n .

Una **soluzione** di questa equazione è una funzione $\bar{\phi}(\mathbf{x}, t)$ definita su $\Omega \times I$, che soddisfa identicamente l'equazione differenziale:

$$F(\mathbf{x}, t, \bar{\phi}(\mathbf{x}, t), \bar{\phi}_t(\mathbf{x}, t), \nabla\bar{\phi}(\mathbf{x}, t), \dots) \equiv 0, \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times I.$$

Si parla di soluzione **stazionaria** se $\bar{\phi}$ non dipende dal tempo, cioè se $\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) = \bar{\phi}(\mathbf{x})$.

Se un'equazione differenziale alle derivate parziali ammette soluzioni, in generale queste non sono uniche. Per ottenere una soluzione unica, è necessario imporre condizioni ausiliarie:

- le **condizioni al contorno**, che consistono nell'assegnare la funzione incognita o le

sue derivate sulla frontiera del dominio Ω ;

- le **condizioni iniziali**, che consistono nell'assegnare il valore della funzione incognita (o di alcune sue derivate) all'istante iniziale $t = 0$.

Se l'espressione (1.1) non contiene derivate rispetto al tempo, cioè ha la forma

$$F(\mathbf{x}, \phi, \nabla\phi, \dots) = 0 \quad (1.1.2)$$

e la funzione incognita è $\phi = \phi(\mathbf{x})$, è sufficiente assegnare solamente condizioni al contorno su $\partial\Omega$. Si dice che un'equazione differenziale è **lineare** se la funzione F è lineare in ϕ e nelle sue derivate. Ad esempio, nel caso di una dimensione spaziale con $\Omega \subset \mathbb{R}$, sono lineari le equazioni

$$\phi_t + k\phi_{xx} = 0,$$

$$\phi_t - \sin(x^2t)\phi_{xx} = 0,$$

mentre non lo sono le

$$\phi_t + \phi\phi_x = 0,$$

$$\phi_{tt} - (\phi_x)^2 = 0.$$

La proprietà fondamentale delle equazioni lineari è la validità del **principio di sovrapposizione delle soluzioni**: la combinazione lineare di due o più soluzioni dell'equazione è ancora una soluzione. Consideriamo a titolo di esempio un'equazione lineare del primo ordine $F(\mathbf{x}, t, \phi, \phi_t, \nabla\phi) = 0$. La linearità significa in questo caso che $F(\mathbf{x}, t, \phi + \lambda\psi, \phi_t + \lambda\psi_t, \nabla\phi + \lambda\nabla\psi) = F(\mathbf{x}, t, \phi, \phi_t, \nabla\phi) + \lambda F(\mathbf{x}, t, \psi, \psi_t, \nabla\psi)$, per ogni coppia di funzioni regolari ϕ, ψ e per ogni costante reale λ . Se ϕ e ψ sono soluzioni, $F(\mathbf{x}, t, \phi, \phi_t, \nabla\phi) \equiv F(\mathbf{x}, t, \psi, \psi_t, \nabla\psi) \equiv 0$ e dalla linearità segue che anche $\phi + \lambda\psi$ è soluzione.

Un'equazione differenziale si dice **quasi-lineare** se è lineare solo nelle derivate di ordine massimo della funzione incognita.

Ad esempio le equazioni $\phi_t + \phi\phi_x = 0$ e $\phi_{tt} - (\phi_x)^2 = 0$ sono quasi-lineari. Infine, ricordiamo che un'equazione lineare o quasi-lineare si dice **omogenea** se è della forma $L\phi = 0$, con L

un operatore differenziale lineare o quasi-lineare, ad esempio gradiente, divergenza o laplaciano. Al contrario, un'equazione lineare o quasi-lineare si dice **non omogenea** se ha la forma $\mathbf{L}\phi = f$, con f una funzione dipendente eventualmente da (\mathbf{x}, t) ma non dalla funzione incognita ϕ .

Nel caso più semplice in cui abbiamo due variabili indipendenti, un'equazione lineare del secondo ordine alle derivate parziali è della forma:

$$A\phi_{xx} + 2B\phi_{xy} + C\phi_{yy} + D\phi_x + E\phi_y + F\phi = G, \quad (1.1.3)$$

dove A, B, C, D, E, F e G sono funzioni assegnate in un aperto Ω del piano (x, y) .

Definizione 1.1.1. *L'equazione (1.1.3) si dice **ellittica** in (x_0, y_0) se in tale punto risulta $AC - B^2 > 0$, **parabolica** se $AC - B^2 = 0$ o **iperbolica** se $AC - B^2 < 0$.*

L'equazione (1.1.3) si dice ellittica, parabolica o iperbolica in Ω , se essa è rispettivamente ellittica, parabolica, iperbolica in ogni punto di Ω .

Osserviamo che la classificazione si fa considerando esclusivamente i coefficienti delle derivate seconde.

L'esempio più semplice di equazione ellittica è l'equazione di Laplace in due variabili:

$$\Delta\phi = 0.$$

Un esempio di equazione parabolica è l'equazione del calore 1-dimensionale:

$$\phi_{xx} - K\phi_y = 0.$$

Un esempio di equazione iperbolica è dato invece dall'equazione della corda vibrante:

$$\phi_{xx} - K\phi_{yy} = 0.$$

In effetti, si può dimostrare che ogni equazione ellittica si può scrivere come equazione di Laplace (eventualmente non omogenea) mediante un opportuno cambiamento di coordinate e

analogamente ogni equazione parabolica o iperbolica si può scrivere come equazione del calore o delle onde rispettivamente.

Un'altra tecnica equivalente alla precedente per classificare le equazioni del tipo (1.1.3) si ottiene mediante le matrici simmetriche. Costruiamo, infatti, la seguente matrice mediante i coefficienti A , B e C :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}. \quad (1.1.4)$$

Tale matrice simmetrica ha due autovalori reali λ_1 e λ_2 . Il prodotto $\lambda_1\lambda_2$ è uguale al valore del determinante della matrice: $\lambda_1\lambda_2 = AC - B^2$.

Possiamo quindi dire che l'equazione (1.1.3) è ellittica se la matrice associata (1.1.4) ha gli autovalori dello stesso segno, parabolica se un autovalore è nullo, iperbolica se gli autovalori sono di segno opposto.

Quest'ultima regola per classificare le equazioni del secondo ordine alle derivate parziali può essere facilmente estesa al caso di equazioni con n ($n > 2$) variabili indipendenti.

Consideriamo a tal proposito l'equazione:

$$\sum_{i,j}^{1,n} A_{ij} \phi_{x_i x_j} + \sum_{i,j}^{1,n} B_i \phi_{x_i} + C \phi = D, \quad (1.1.5)$$

dove A_{ij} , B_i , C e D sono funzioni di $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ definite in un aperto Ω di \mathbb{R}^n . Supponiamo $A_{ij} = A_{ji}$ e consideriamo la seguente matrice di ordine n :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}. \quad (1.1.6)$$

Essendo tale matrice simmetrica di ordine n , essa ha esattamente n autovalori reali.

Definizione 1.1.2. L'equazione (1.1.5) si dice **ellittica** in un punto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se in tale punto la matrice (1.1.6) ha tutti gli autovalori dello stesso segno; si dice **parabolica** se $n - 1$ autovalori sono dello stesso segno e il rimanente è nullo; si dice **iperbolica** se $n - 1$ autovalori sono dello stesso segno e il rimanente è di segno opposto.

L'equazione (1.1.5) si dice ellittica, parabolica o iperbolica in Ω se essa è rispettivamente ellittica, parabolica o iperbolica in ogni punto di Ω .

Un'ulteriore classificazione delle equazioni alle derivate parziali si ottiene considerando la forma quadratica associata alla matrice (1.1.6):

$$\sum_{i,j}^{1,n} A_{ij} \xi_i \xi_j, \quad (1.1.7)$$

dove ξ_1, \dots, ξ_n sono variabili reali. In corrispondenza di un punto fissato $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, la (1.1.7) può essere scritta come

$$\sum_i^{1,n} \lambda_i (\eta_i)^2, \quad (1.1.8)$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori della matrice (1.1.6) e gli η_1, \dots, η_n sono combinazioni lineari di ξ_1, \dots, ξ_n .

Dalla (1.1.8) si vede che se gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono tutti positivi, allora la forma quadratica (1.1.8) è definita positiva e viceversa, se la forma quadratica è definita positiva gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ devono essere tutti positivi. Ne segue che l'equazione (1.1.5) si dice ellittica se la forma quadratica (1.1.8) ad essa associata è definita positiva.

Se gli autovalori della matrice (1.1.6) sono tutti negativi, cambiando il segno del primo e secondo membro dell'equazione (1.1.5), gli autovalori della nuova matrice associata saranno tutti positivi.

L'origine dei tre nomi è legata alla forma delle curve di livello del polinomio caratteristico associato alla matrice:

$$P(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c$$

e nel caso di n variabili:

$$P(\xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j + \sum_{i=1}^n b_i \xi_i + c.$$

Infatti, per $n = 2$, l'insieme $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : P(x, y) = t\}$, se non vuoto, rappresenta un'ellisse se gli autovalori sono non nulli e concordi; un'iperbole se gli autovalori sono non nulli e discordi; una parabola se uno dei due autovalori è nullo.

Per $n > 2$, la classificazione diventa più complicata.

Per $n = 3$, si hanno i seguenti casi:

- tre autovalori concordi: le curve di livello del polinomio caratteristico sono **ellissoidi**;
- due autovalori concordi, uno discorde: le curve di livello sono **iperboloidi a due falde**;
- due autovalori concordi e uno nullo: le curve di livello sono **paraboloidi**;
- due autovalori discordi e uno nullo: le curve di livello sono **iperboloidi a una falda**;
- due autovalori nulli e uno non nullo: le curve di livello sono **cilindri obliqui a sezione parabolica**.

Nel caso generale, non tutte le possibilità hanno riscontro fisico e sono poco studiate per l'assenza di esempi applicativi come nei seguenti casi:

- k autovalori positivi e $n - k$ negativi, con $2 \leq k \leq n - 2$;
- $n - 2$ autovalori concordi e due nulli: si trovano alcuni esempi in problemi di tipo biologico (dinamica delle popolazioni);
- k autovalori nulli e $n - k$ non tutti concordi.

Esistono anche equazioni che cambiano natura in un aperto fissato. Ad esempio, l'equazione $\phi_{xx} + x\phi_{yy} + \phi_y = 0$ è ellittica per $x > 0$, parabolica per $x = 0$, iperbolica per $x < 0$.

Le classi di equazioni differenziali che derivano dalla classificazione appena trattata sono le seguenti:

- l'equazione di Laplace n -dimensionale: $\Delta\phi = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 \phi = 0$;
- l'equazione del calore $(n + 1)$ -dimensionale: $\phi_t - \Delta\phi = 0$;
- l'equazione di D'Alembert $(n + 1)$ -dimensionale o equazione delle onde: $\phi_{tt} - c^2 \Delta\phi = 0$.

1.2 Classificazione delle equazioni puntuali

Vogliamo fornire un metodo di riduzione di un'equazione differenziale quasi-lineare del secondo ordine alla forma canonica in ogni singolo punto dove è assegnata l'equazione.

Consideriamo a tal proposito un'equazione differenziale quasi-lineare del secondo ordine

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \phi(x, u, \nabla u) = 0, \quad (1.2.1)$$

a coefficienti continui $a_{ij}(x)$. Stabiliamo la legge di trasformazione di questi coefficienti nel caso di un cambiamento non singolare di variabili indipendenti $y = y(x)$, cioè:

$$y_l = y_l(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad l = 1, 2, \dots, n, y_l \in \mathcal{C}^2(\Omega)$$

$$D = \begin{pmatrix} y_1, y_2, \dots, y_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix} \neq 0 \quad (1.2.2)$$

Quindi, in un certo intorno le variabili x si possono esprimere in funzione delle nuove variabili y , cioè $x = x(y)$. Denotiamo $u(x(y)) = \tilde{u}(y)$; si ha allora $\tilde{u}(y(x)) = u(x)$. Abbiamo:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i}, \quad (1.2.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l \partial y_k} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Sostituendo le equazioni (1.2.3) nell'equazione (1.2.1), si ottiene

$$\sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l \partial y_k} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial y_l} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j} + \phi^*(y, \tilde{u}, \text{grad } \tilde{u}) = 0. \quad (1.2.4)$$

Denotiamo i nuovi coefficienti delle derivate seconde con

$$\tilde{a}_{lk}(y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial x_i}{\partial y_l} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \quad (1.2.5)$$

e riscriviamo l'equazione (1.2.4) nella forma (1.2.1):

$$\sum_{k,l=1}^n \widetilde{a}_{lk}(y) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l \partial y_k} + \tilde{\phi}(y, \tilde{u}, \text{grad } \tilde{u}) = 0. \quad (1.2.6)$$

Fissiamo il punto x_0 e scriviamo $y_0 = y(x_0)$ ed $\alpha_{li} = \frac{\partial y_l(x_0)}{\partial x_i}$.

La formula (1.2.5), nel punto x_0 può essere scritta nella forma:

$$\widetilde{a}_{lk}(y_0) = \sum_{i,j=1}^p a_{ij}(x_0) \alpha_{li} \alpha_{kj}. \quad (1.2.7)$$

Questa formula di trasformazione dei coefficienti a_{ij} nel punto x_0 coincide con la formula di trasformazione dei coefficienti della forma quadratica:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) p_i p_j. \quad (1.2.8)$$

Nel caso della trasformazione lineare non singolare:

$$p_i = \sum_{l=1}^n \alpha_{li} q_l, \det(\alpha_{li}) \neq 0, \quad (1.2.9)$$

che trasforma la (1.2.8) nella forma

$$\sum_{k,l=1}^n \widetilde{a}_{lk}(y_0) q_l q_k. \quad (1.2.10)$$

Ma, grazie all'algebra lineare sappiamo che esiste sempre una trasformazione non singolare (1.2.9) che fa assumere alla forma quadratica (1.2.8) la seguente forma canonica:

$$\sum_{l=1}^r q_l^2 - \sum_{l=r+1}^m q_l^2, m \leq n. \quad (1.2.11)$$

Dove, in virtù della legge d'inerzia delle forme quadratiche, gli interi r e m non dipendono dalla trasformazione non singolare (1.2.9). Questo permette di classificare le equazioni differenziali (1.2.1) in base ai valori che i coefficienti a_{ij} assumono nel punto x_0 .

Definizione 1.2.1. *Se nella forma quadratica (1.2.11), $m = n$ e tutti i termini sono dello stesso segno, l'equazione (1.2.1) è detta equazione di tipo ellittico; se $m = n$, ma ci sono termini di segni diversi, l'equazione (1.2.1) è di tipo iperbolico; se invece $m < n$, l'equazione (1.2.1) è di tipo parabolico.*

Osservazione 1.2.1: La classificazione appena riportata delle equazioni quasi-lineari del secondo ordine dipende dal punto x_0 perché i numeri r e m dipendono da x_0 . Per esempio, l'equazione di Tricomi:

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1.2.12)$$

è di *tipo misto*: per $y < 0$ è di tipo iperbolico, per $y > 0$ essa è di tipo ellittico e infine, per $y = 0$ è di tipo parabolico.

Siano i coefficienti a_{ij} dell'equazione (1.2.1) costanti e supponiamo che la trasformazione (1.2.9) fa assumere alla forma quadratica (1.2.8) la forma canonica (1.2.11). Allora, la sostituzione lineare di variabili indipendenti

$$y_l = \sum_{i=1}^n \alpha_{li} x_i$$

trasforma l'equazione (1.2.1) nella seguente forma canonica:

$$\sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l^2} - \sum_{l=r+1}^m \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l^2} + \tilde{\phi}(y, \tilde{u}, \text{grad } \tilde{u}) = 0. \quad (1.2.13)$$

1.3 Superfici caratteristiche

Supponiamo che la funzione $\omega(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n \geq 2$ di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$ sia tale che sulla superficie $\omega(x) = 0$, si abbia $\text{grad } \omega(x) \neq 0$ ed inoltre

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_j} = 0. \quad (1.3.1)$$

Allora questa superficie è detta **superficie caratteristica o caratteristica** dell'equazione quasi-lineare (1.2.1) e l'equazione (1.3.1) è detta **equazione caratteristica**.

Per $n = 2$ la superficie caratteristica è detta **curva caratteristica**.

Supponiamo che ogni superficie della famiglia $\omega(x) - C = 0$, $a < C < b$, sia una caratteristica dell'equazione (1.2.1). Siccome su ogni caratteristica si ha $\text{grad } \omega(x) \neq 0$, questa famiglia riempie una regione G sufficientemente piccola, attraverso ogni punto della quale passa una ed una sola caratteristica. Supponiamo che $\omega \in C^2(G)$. Allora, se nella trasformazione (1.2.2) poniamo $y_1 = \omega(x)$, considerando i coefficienti (1.2.5) e l'equazione (1.3.1), il coefficiente \tilde{a}_{11} si annulla nella corrispondente regione \tilde{G} . Perciò conoscendo una o alcune famiglie di caratteristiche di un'equazione differenziale è possibile ridurre l'equazione ad una forma più semplice. Evidenziamo le caratteristiche che si ottengono per le principali equazioni alle derivate parziali del secondo ordine.

a) *Equazione delle onde*. La sua caratteristica è della forma:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - a^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right)^2 = 0.$$

La superficie:

$$a^2(t - t_0)^2 - |x - x_0|^2 = 0, \quad (1.3.2)$$

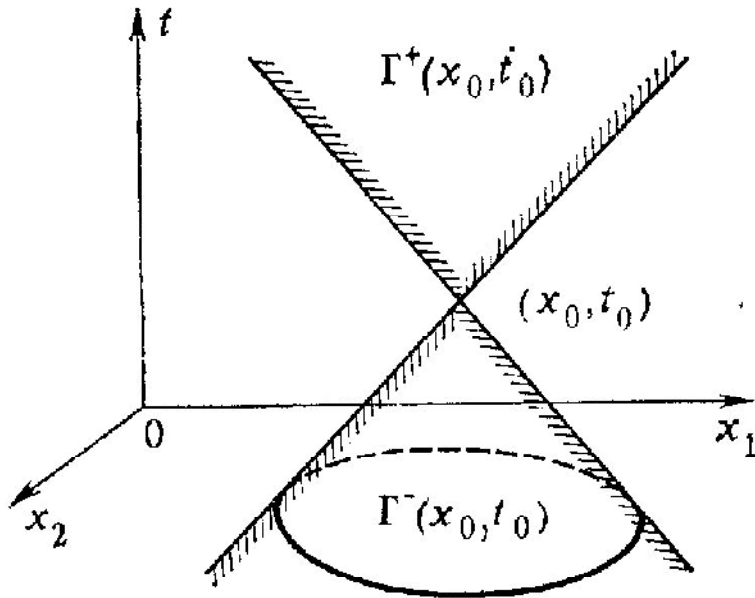
detta cono caratteristico con vertice nel punto (x_0, t_0) è una caratteristica dell'equazione delle onde.

Il cono caratteristico (1.3.2) è la frontiera dei coni

$$\Gamma^+(x_0, t_0) = [a(t - t_0) > |x - x_0|] \text{ e}$$

$$\Gamma^-(x_0, t_0) = [-a(t - t_0) > |x - x_0|],$$

detti rispettivamente coni di futuro e di passato con il vertice nel punto (x_0, t_0) , come appare in figura:



Scriviamo $\Gamma^\pm = \Gamma^\pm(0,0)$. L'equazione dell'onda ha anche un'altra famiglia di superfici caratteristiche, la famiglia di piani tangenti ai coni caratteristici $at + (x, b) = C$, dove $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, b_k e C sono numeri reali e $|b| = 1$.

b) *Equazione di conduzione termica*. Le sue caratteristiche costituiscono la famiglia di piani $t = C$.

c) *Equazione di Poisson*. Questa equazione non ha caratteristiche reali perché l'equazione caratteristica $\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right)^2 = 0$ su $\omega = 0$, significa che $\text{grad } \omega$ è nullo su $\omega = 0$, il che è impossibile.

1.4 Forma canonica delle equazioni del secondo ordine a due variabili indipendenti

Ci chiediamo se è possibile estendere la forma canonica trovata in precedenza, valida per ogni singolo punto, ad un intorno sufficientemente piccolo del punto mediante la stessa trasformazione (1.2.2).

Per realizzare questa estensione è necessario che il numero di condizioni

$$\widetilde{a}_{lk} = 0, \quad l \neq k, \quad l, k = 1, 2, \dots, n;$$

$$\widetilde{a}_{ll} = \varepsilon_l \widetilde{a}_{11}, \quad l = 2, 3, \dots, n; \quad \widetilde{a}_{11} \neq 0,$$

dove $\varepsilon_l = 0, \pm 1$, non sia superiore al numero delle funzioni incognite $y_l, l = 1, 2, \dots, n$:

$$\frac{n(n-1)}{2} + n - 1 \leq n, \quad \text{cioè } n \leq 2.$$

Teorema 1.4.1. Per $n = 2$, è sempre possibile realizzare la riduzione dell'equazione (1.2.1)

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \phi(x, u, \nabla u) = 0 \quad \text{alla forma canonica (1.2.13)} \quad \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l^2} - \sum_{l=r+1}^m \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l^2} +$$

$\tilde{\phi}(y, \tilde{u}, \text{grad } \tilde{u}) = 0$ in un intorno sufficientemente piccolo di ogni punto.

Dimostrazione. Consideriamo un'equazione differenziale quasi-lineare del secondo ordine a due variabili indipendenti:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad (1.4.1)$$

dove supponiamo che i coefficienti a, b, c siano $\mathcal{C}^2(\Omega)$ in un certo intorno e non si annullino simultaneamente in nessun punto di questo intorno. Possiamo supporre $a \neq 0$ in questo intorno in quanto in caso contrario si avrebbe $c \neq 0$, ma possiamo sempre permutare x con y e ottenere un'equazione in cui $a \neq 0$. Se invece a e c si annullano simultaneamente in un punto, allora $b \neq 0$ nell'intorno di questo punto. In questo caso, dopo aver diviso l'equazione (1.4.1) per $2b$, si ottiene l'equazione canonica (1.2.13).

Passando alle nuove variabili

$$\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y), \xi \in \mathcal{C}^2(\Omega), \eta \in \mathcal{C}^2(\Omega), D\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right) \neq 0, \quad (1.4.2)$$

l'equazione (1.4.1) assume la forma:

$$\tilde{a} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 2\tilde{b} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \tilde{c} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \tilde{\phi}\left(\xi, \eta, \tilde{u}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\right) = 0, \quad (1.4.3)$$

dove, tenendo conto dei nuovi coefficienti delle derivate seconde (1.2.5), si ha:

$$\tilde{a} = a \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$\tilde{b} = a \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + c \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (1.4.4)$$

$$\tilde{c} = a \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2.$$

Richiediamo che le funzioni $\xi(x, y)$ e $\eta(x, y)$ annullino i coefficienti \tilde{a} e \tilde{c} , cioè soddisfino le equazioni

$$\begin{aligned} a \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 &= 0, \\ a \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Essendo $a \neq 0$, le equazioni precedenti sono equivalenti alle equazioni lineari:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \lambda_1(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} + \lambda_2(x, y) \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad (1.4.6)$$

con

$$\lambda_1 = \frac{b - \sqrt{d}}{a}, \quad \lambda_2 = \frac{b + \sqrt{d}}{a}, \quad \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{2\sqrt{d}}{a}, \quad d = b^2 - ac. \quad (1.4.7)$$

In base alla classificazione generale delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine descritta nel paragrafo 1.1, sono possibili i seguenti tipi di equazioni:

1. Tipo iperbolico, se $d > 0$.
2. Tipo parabolico, se $d = 0$.
3. Tipo ellittico, se $d < 0$.

1. In questo caso, l'equazione (1.4.1) è ridotta alla forma canonica

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \tilde{\phi} = 0. \quad (1.4.8)$$

Notiamo che la sostituzione di variabili $\rho = \xi + \eta$, $\sigma = \xi - \eta$ riduce l'equazione (1.4.1) ad un'altra forma canonica equivalente

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \sigma^2} + \phi_1 = 0. \quad (1.4.9)$$

Per dimostrare la rappresentazione (1.4.8) stabiliamo l'esistenza almeno di una coppia di soluzioni (ξ, η) delle equazioni (1.4.6) soddisfacenti le condizioni (1.4.2). Notiamo

che λ_1 e λ_2 appartengono a $C^2(\Omega)$. Stabiliamo prima la relazione di queste soluzioni con le caratteristiche dell'equazione (1.4.1).

Supponiamo che esistano soluzioni delle equazioni (1.4.6) tali che $grad \xi \neq 0$ nell'intorno considerato. Allora, per definizione le curve

$$\xi(x, y) = C_1, \quad \eta(x, y) = C_2 \quad (1.4.10)$$

definiscono due famiglie di caratteristiche dell'equazione (1.4.1). In seguito avremo bisogno del seguente:

Lemma 1.4.1. *Sia la funzione $\omega(x, y)$ di classe $C^1(\Omega)$ tale che $\partial\omega/\partial y \neq 0$. Affinché la famiglia di curve $\omega(x, y) = C$ sia le caratteristiche dell'equazione (1.4.1), è necessario e sufficiente che l'espressione $\omega(x, y) = C$ sia l'integrale generale di una delle equazioni differenziali ordinarie*

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = \lambda_2(x, y). \quad (1.4.11)$$

Le equazioni (1.4.10) sono le equazioni differenziali delle caratteristiche dell'equazione (1.4.1).

Dimostrazione. Sia $\omega(x, y) = C$ una famiglia di caratteristiche dell'equazione (1.4.1). Dalla condizione $\partial\omega/\partial y \neq 0$ segue che le curve $\omega(x, y) = C$ occupano un certo intorno. Per questa ragione la funzione ω soddisfa in questo intorno una delle equazioni (1.4.6), per esempio, l'equazione

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} + \lambda_1(x, y) \frac{\partial\omega}{\partial y} = 0. \quad (1.4.6')$$

Poi, su ogni caratteristica $\omega(x, y) = C$ è valida la relazione

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (1.4.12)$$

Da questa e dalla (1.4.6') otteniamo la (1.4.11).

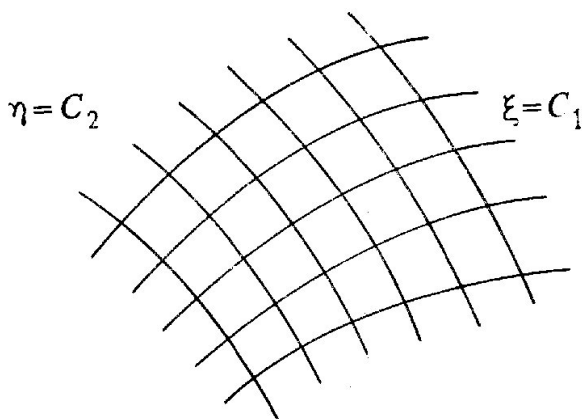
Viceversa, se $\omega(x, y) = C$ è l'integrale generale di una delle equazioni (1.4.10), per esempio, dell'equazione $y' = \lambda_1(x, y)$, allora, in virtù della (1.4.11), su ogni curva $\omega(x, y) = C$ è verificata la relazione (1.4.6'). Ma, per il teorema di esistenza e di unicità

delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie, per ogni punto dell'intorno considerato passa una curva integrale $\omega(x, y) = C$ di quest'equazione. Per questa ragione, l'equazione (1.4.6') è soddisfatta in tutti i punti di questo intorno. Concludiamo che, visto che $\omega \in C^1(\Omega)$ e $\partial\omega/\partial y \neq 0$, le curve $\omega(x, y) = C$ sono caratteristiche dell'equazione (1.4.1). ■

In base al lemma dimostrato, gli integrali generali delle equazioni (1.4.10), $\xi(x, y) = C_1$ e $\eta(x, y) = C_2$, sono tali che ξ e η appartengono a $C^1(\Omega)$ ed anche $\partial\xi/\partial y$ e $\partial\eta/\partial y$ non sono nulli, definiscono due famiglie di caratteristiche dell'equazione (1.4.1). Come segue dalla teoria generale delle equazioni differenziali ordinarie, questi integrali esistono, possibilmente, in un intorno più piccolo. Dato che $\lambda_i \in C^2(\Omega)$, ξ ed η appartengono a $C^2(\Omega)$ e, in virtù delle (1.4.11) e (1.4.7), si ha:

$$D\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right) = \frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y} (\lambda_2 - \lambda_1) = 2 \frac{\sqrt{d}}{a} \frac{\partial\xi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y} \neq 0.$$

Quindi, le famiglie di caratteristiche (1.4.10) formano famiglie di linee coordinate come in figura.



Dividendo l'equazione (1.4.3) per il coefficiente $2\tilde{b} \neq 0$, si ottiene la forma canonica dell'equazione (1.4.8).

2. Sia $d = 0$ in un certo intorno. Allora l'equazione (1.4.6) è ridotta alla forma canonica

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \tilde{\phi} = 0. \quad (1.4.13)$$

In questo caso, dalla (1.4.11), $\lambda_1 = \lambda_2 = b/a \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, in modo che le equazioni differenziali (1.4.11) coincidono e diventano

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{b}{a} \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0. \quad (1.4.14)$$

Perciò si ha una famiglia $\xi(x, y) = C_1$ di caratteristiche dell'equazione (1.4.6) definita, in base al lemma 1.4.1, in termini dell'integrale generale dell'equazione $y_1 = b/a$, tale che $\partial \xi / \partial y \neq 0$, con $\xi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.

Come seconda famiglia di linee coordinate scegliamo le rette $x = C_2$. In complesso, la sostituzione di variabili

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = x, \quad \mathcal{D} \left(\frac{\xi, \eta}{x, y} \right) = -\frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0,$$

in virtù delle (1.4.3) e (1.4.4), ci fornisce:

$$\check{a} = 0, \quad \check{b} = a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \check{c} = a.$$

Dividendo l'equazione (1.4.3) per il coefficiente $\check{c} = a \neq 0$, si ottiene la forma canonica della (1.4.13).

3. Supponiamo che i coefficienti a, b e c dell'equazione (1.4.1) siano funzioni analitiche delle variabili (x, y) in un intorno di un certo punto. Allora quest'equazione è ridotta alla forma canonica:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \tilde{\phi} = 0. \quad (1.4.15)$$

In questo caso, in base alla (1.4.6), i coefficienti λ_1 e λ_2 delle equazioni (1.4.5) sono funzioni analitiche, e inoltre $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ se (x, y) sono reali. Dal teorema di Cauchy-Kovalevskaja segue che, in un intorno sufficientemente piccolo, esiste una soluzione analitica $\omega(x, y)$ dell'equazione

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \lambda_1(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \quad (1.4.6')$$

che soddisfa la condizione $\frac{\partial \omega}{\partial y} \neq 0$. Poniamo:

$$\xi = \frac{\omega(x,y) + \bar{\omega}(x,y)}{2}, \eta = \frac{\omega(x,y) - \bar{\omega}(x,y)}{2i}, \quad (1.4.16)$$

dove $\bar{\omega} = \xi - i\eta$ è una funzione complessa coniugata con $\omega = \xi + i\eta$. Questa funzione soddisfa la seconda delle equazioni (1.4.6):

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} + \lambda_2(x,y) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = 0.$$

Le funzioni ξ e η appartenenti a $C^\infty(\Omega)$ hanno uno Jacobiano non nullo:

$$\mathcal{D} \begin{pmatrix} \xi, \eta \\ x, y \end{pmatrix} = \mathcal{D} \begin{pmatrix} \xi, \eta \\ \omega, \bar{\omega} \end{pmatrix} \mathcal{D} \begin{pmatrix} \omega, \bar{\omega} \\ x, y \end{pmatrix} = -\frac{1}{2i} 2 \frac{\sqrt{d}}{a} \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = -\frac{\sqrt{-d}}{a} \left| \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|^2 \neq 0.$$

Per questa ragione le funzioni ξ e η possono essere scelte come nuove variabili. Vediamo quale forma assumerà l'equazione (1.4.15) con queste variabili. Per costruzione, la funzione ω soddisfa l'equazione

$$a \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 = 0.$$

Separando qui le parti reale e immaginaria ed utilizzando le (1.4.16), otteniamo

$$a \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = a \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2,$$

$$a \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + c \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

Tenendo conto delle formule (1.4.4), concludiamo che $\tilde{a} = \tilde{c}$ e $\tilde{b} = 0$ nelle variabili ξ e η . Poi, poiché $d < 0$ e $\partial \xi / \partial y \neq 0$, si ha $\tilde{a} = \tilde{c} \neq 0$. Dividendo l'equazione (1.4.3) per $\tilde{a} = \tilde{c} \neq 0$, questa si riduce alla forma canonica (1.4.15). ■

1.5 Classificazione dei problemi al contorno.

Come è stato mostrato in precedenza, l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t) \quad (1.5.1)$$

descrive le vibrazioni, l'equazione

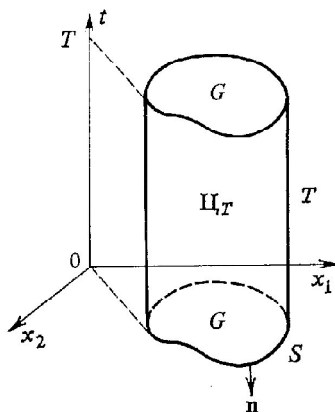
$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t) \quad (1.5.2)$$

descrive la diffusione e infine, l'equazione

$$-\operatorname{div} (p \operatorname{grad} u) + qu = F(x) \quad (1.5.3)$$

descrive i rispettivi processi stazionari.

Siano $G \subset \mathbb{R}^n$ una regione in cui si svolga il processo e S la sua frontiera che sia supposta una superficie regolare a tratti. Dunque, G è la regione di variazione degli argomenti x nell'equazione (1.5.3), il *dominio di definizione* dell'equazione (1.5.3). Assumiamo che il dominio di definizione delle equazioni (1.5.1) e (1.5.2) sia un cilindro $\Pi_T = G \times (0, T)$ di altezza T e di base G . La sua frontiera consiste della superficie laterale $S \times [0, T]$ e di due basi: quella inferiore $\bar{G} \times \{0\}$ e quella superiore $\bar{G} \times \{T\}$ come in figura.



Supporremo che i coefficienti ρ, p e q delle equazioni (1.5.1) e (1.5.3) non dipendano dal tempo t ; inoltre, in conformità con il loro significato fisico, supporremo che $\rho(x) > 0, p(x) > 0, q(x) \geq 0, x \in \bar{G}$. Infine, conformemente al significato fisico delle equazioni (1.5.1)-(1.5.3), dobbiamo assumere che $\rho \in C^0(\bar{G}), p \in C^1(\bar{G})$ e $q \in C^0(\bar{G})$.

Con queste supposizioni, conformemente alla classificazione precedente, l'equazione delle vibrazioni (1.5.1) è di tipo iperbolico, quella della diffusione (1.5.2) di tipo parabolico e quella stazionaria (1.5.3) di tipo ellittico.

Dunque, la differenza nel tipo di equazioni considerate è strettamente legata alla differenza dei processi fisici descritti mediante queste equazioni.

Come è stato già detto in precedenza, per descrivere completamente un processo fisico, si deve assegnare, oltre all'equazione stessa che descrive questo processo, lo stato iniziale di questo processo (*condizioni iniziali*) ed il comportamento sulla frontiera della regione in cui si svolge questo processo (*condizioni al bordo*). Dal punto di vista matematico ciò è dovuto alla non unicità della soluzione delle equazioni differenziali. Infatti, persino per le equazioni differenziali ordinarie di ordine n la soluzione generale dipende da n costanti arbitrarie. Per le equazioni alle derivate parziali la soluzione, in generale, dipende da funzioni arbitrarie; per esempio, la soluzione generale dell'equazione $u_x = 0$ nella classe di funzioni dipendenti dalle variabili x ed y , ha la forma $u(x, y) = f(y)$, dove f è una funzione arbitraria appartenente alla classe $C^2(\Omega)$. Quindi, per separare una soluzione particolare che descrive un processo fisico reale, si devono imporre *condizione al contorno*. Il corrispondente problema è detto *problema al contorno*. Si distinguono, quindi, tre tipi principali di problemi al contorno per le equazioni differenziali.

- *Problema di Cauchy* per le equazioni dei tipi iperbolico e parabolico: vengono assegnate le condizioni iniziali, la regione G coincide con tutto lo spazio \mathbb{R}^n , mentre le condizioni di frontiera sono assenti.
- *Problema al contorno* per le equazioni di tipo ellittico: sono assegnate le condizioni al bordo sulla frontiera S mentre le condizioni iniziali sono assenti.
- *Problema misto* per le equazioni dei tipi iperbolico e parabolico: sono assegnate le condizioni iniziali e quelle al bordo, $G \neq \mathbb{R}^n$.

Descriviamo più dettagliatamente l'impostazione di ognuno dei problemi al contorno menzionati per le equazioni considerate (1.5.1) e (1.5.2).

1.6 Problema di Cauchy

Per l'equazione delle vibrazioni (1.5.1) (di tipo iperbolico), il problema di Cauchy è formulato come segue: determinare una funzione $u(x, t)$ di classe $\mathcal{C}^2(t > 0) \cap \mathcal{C}^1(t \geq 0)$ soddisfacente l'equazione (1.5.1) nel semispazio $t > 0$ e le condizioni iniziali per $t = 0$:

$$u|_{t=0} = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1(x). \quad (1.6.1)$$

E' anche necessario che $F \in \mathcal{C}(t > 0)$, $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$.

Per l'equazione della diffusione (1.5.2) (di tipo parabolico) il problema di Cauchy è formulato come segue: trovare una funzione $u(x, t)$ di classe $\mathcal{C}^2(t > 0) \cap \mathcal{C}^1(t \geq 0)$ che soddisfa l'equazione (1.5.2) nel semispazio $t > 0$ e la condizione iniziale per $t = 0$:

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (1.6.2)$$

E' anche necessario che $F \in \mathcal{C}(t > 0)$, $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$.

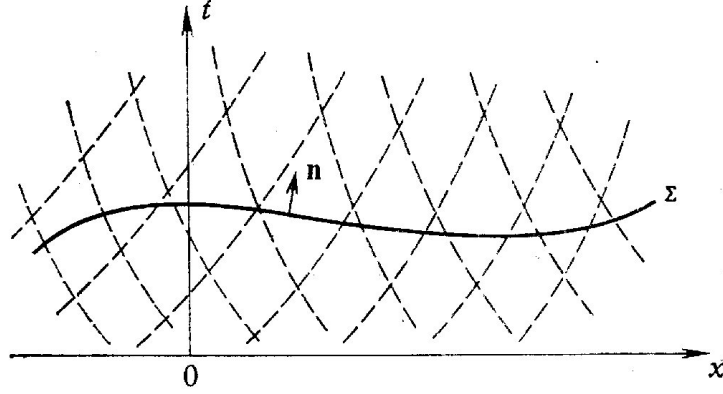
L'impostazione menzionata del problema di Cauchy per un'equazione di tipo iperbolico ammette la seguente generalizzazione. Siano date l'equazione quasi-lineare del secondo ordine di tipo iperbolico

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_{i0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} + \phi \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad (1.6.3)$$

la superficie regolare a tratti $\Sigma := [t = \sigma(x)]$ e le funzioni u_0 ed u_1 su Σ (*dati di Cauchy*). Il problema di Cauchy per l'equazione (1.6.3) consiste nel trovare, in una certa parte della regione $t > \sigma(x)$ adiacente alla superficie Σ , una soluzione $u(x, t)$ soddisfacente su Σ , le condizioni al contorno

$$u|_{\Sigma} = u_0, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Sigma} = u_1, \quad (1.6.4)$$

dove \mathbf{n} è la normale a Σ diretta dalla parte dei t crescenti, come in figura.



1.7 Il ruolo delle caratteristiche nell'impostazione del problema di Cauchy

Supponiamo che la superficie Σ appartenga alla classe $C^2(\Omega)$ e non tocchi in alcun suo punto la superficie caratteristica dell'equazione (6), cioè che su Σ sia verificata l'uguaglianza

$$\tilde{a}_{00} \equiv 1 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_{i0} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \neq 0. \quad (1.7.1)$$

Trasformiamo il problema di Cauchy (1.6.3) e (1.6.4) in un problema di Cauchy in cui i dati di Cauchy vengono assegnati sul piano $\tau = 0$. Perciò, sostituiamo la variabile t , con una nuova variabile $\tau = t - \sigma(x)$. Con questa sostituzione di variabile l'equazione (1.6.3) per la funzione

$$\tilde{u}(x, \tau) = u(x, \tau + \sigma(x)) \quad (1.7.2)$$

nell'intorno di Σ assume la forma:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} = \frac{1}{\tilde{a}_{00}} \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{\tilde{a}_{00}} \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{i0} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial \tau} + \tilde{\phi} \quad (1.7.3)$$

e in virtù della (1.7.1), $\tilde{a}_{00} \neq 0$ su Σ . Con ciò la superficie Σ si trasforma nel piano $\tau = 0$ e le condizioni al contorno (1.6.4), in virtù della (1.7.2), assumono la forma:

$$\tilde{u}|_{\tau=0} = u|_{\Sigma} = u_0(x), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau}|_{\tau=0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{\Sigma}. \quad (1.7.4)$$

Non resta che trovare $\partial u / \partial t$ su Σ . Derivando la prima delle condizioni al contorno (1.6.4), $u_0(x) = u(x, \sigma(x))$, rispetto a x_i , si ottengono n relazioni su Σ :

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.7.5)$$

Derivando la funzione $u(x, t)$ lungo la normale

$$n = \left(\frac{1}{\Delta}, -\frac{1}{\Delta} \text{grad } \sigma \right), \quad \Delta = \sqrt{1 + |\text{grad } \sigma|^2},$$

e, tenendo conto della seconda delle condizioni al contorno (1.6.4), si ottiene un'altra relazione su Σ :

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}. \quad (1.7.6)$$

Il sistema di equazioni algebriche lineari (1.7.5) e (1.7.6) è univocamente risolvibile rispetto alle quantità $\partial u / \partial x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) e $\partial u / \partial t$ in ogni punto della superficie Σ , poiché il suo determinante non è nullo:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} & 1 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x_n} & & & 0 \\ \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} & \dots & -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \sigma}{\partial x_n} & \end{vmatrix} = (-1)^n \Delta \neq 0.$$

1.8 Problema al contorno per le equazioni di tipo ellittico.

Il problema al contorno per l'equazione (1.5.3) consiste nel trovare una funzione $u(x)$ di classe $C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$ che soddisfa nella regione G l'equazione (1.5.3) e la condizione di frontiera su S della forma

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = v, \quad (1.8.1)$$

dove α , β e v sono funzioni continue a tratti date su S ed inoltre $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$.

Si distinguono i seguenti tipi di condizioni al bordo.

Condizione al bordo di primo tipo ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)

$$u|_S = u_0. \quad (1.8.2)$$

Condizione al bordo di secondo tipo ($\alpha = 0$, $\beta = 1$)

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = u_1. \quad (1.8.3)$$

Condizione al bordo di terzo tipo ($\beta = 1, \alpha \geq 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u \Big|_S = u_2. \quad (1.8.4)$$

I corrispondenti problemi al contorno sono detti *problemi al contorno di primo, secondo e terzo tipo*.

Per le equazioni di Laplace e Poisson il problema al contorno di primo tipo

$$\Delta u = -f, \quad u \Big|_S = u_0 \quad (1.8.5)$$

è detto **problema di Dirichlet**; il problema al contorno di secondo tipo

$$\Delta u = -f, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = u_1 \quad (1.8.6)$$

detto **problema di Neumann**.

In modo analogo vengono imposti i problemi al contorno per l'equazione (1.5.3) anche all'esterno di una regione limitata G (problemi al contorno esterni). La differenza consiste nel fatto che, oltre alla condizione di frontiera (1.8.1) su S , sono anche assegnate le condizioni all'infinito.

L'equazione (1.3.1) è ridotta alla forma canonica $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \tilde{\phi} = 0$ (1.4.13). In questo caso, tenendo conto delle (1.4.7), $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{b}{a} \in C^2(\Omega)$ e le (1.4.11) coincidono e diventano:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{b}{a} \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \quad (1.8.7).$$

Tratteremo nel seguito un'applicazione dell'equazione del calore legata al corretto dimensionamento di una cantina vinicola. Analizziamo, quindi, nel dettaglio l'equazione del calore.

Capitolo 2

L'equazione del calore

2.1 L'equazione del calore

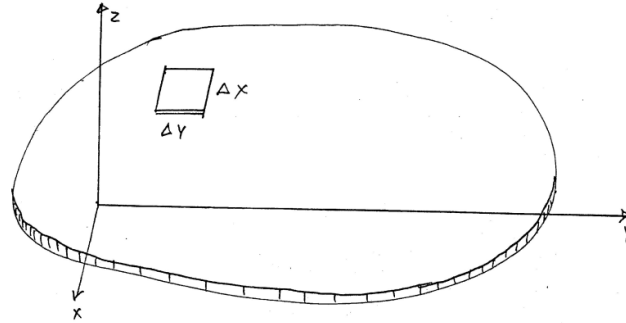
Esaminiamo un primo esempio di un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine che ha come incognita una funzione di due o più variabili indipendenti e in cui compare almeno una derivata parziale seconda della funzione incognita che ha un particolare significato nel mondo fisico.

L'operatore differenziale del calore $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$ è usato per descrivere diversi fenomeni di diffusione come quella del calore in un mezzo isotropo.

La propagazione del calore nei solidi la si deve al matematico e fisico Joseph Fourier che nella sua opera *"Théorie Analytique de la Chaleur"* formula il problema come segue:

"Finché il calore è distribuito in maniera diversa nei vari punti di una massa solida, esso tende a raggiungere l'equilibrio e si propaga lentamente dalle parti che sono più riscaldate a quelle che lo sono meno; allo stesso tempo il calore si diffonde attraverso la superficie e si disperde al centro o nel vuoto. Questa tendenza ha una distribuzione uniforme e l'emissione spontanea di calore che si verifica sulla superficie del corpo provoca un continuo cambiamento della temperatura nei diversi punti. La questione della propagazione del calore consiste nel determinare qual è la temperatura in ciascun punto del corpo ad un determinato istante, supponendo di conoscere le temperature iniziali di superficie e del corpo".

Consideriamo quindi una piastra omogenea di spessore trascurabile situata nel piano (x, y) .



Supponiamo che il calore entro tale piastra non si propaghi sull'asse z , ma solamente nel piano (x, y) . Supponiamo inoltre che all'interno del corpo non vi siano sorgenti di calore.

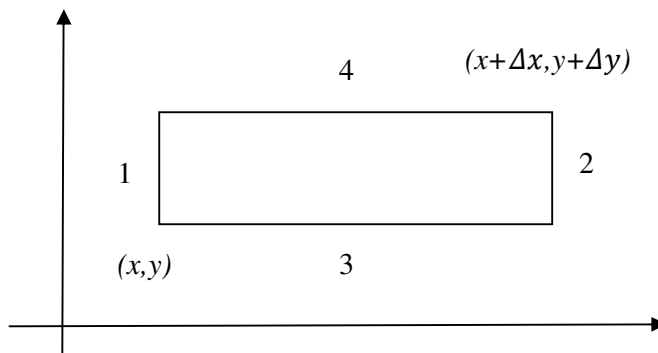
Vogliamo determinare l'equazione cui deve soddisfare la temperatura ϕ nel punto (x, y) all'istante t .

Consideriamo un rettangolo di dimensioni Δx e Δy . Per la legge di conservazione dell'energia, la quantità di calore ΔQ in entrata nel rettangolo nell'intervallo di tempo Δt è uguale all'aumento di calore dentro il rettangolo nello stesso intervallo di tempo. Questo aumento di calore ΔQ è proporzionale alla derivata della temperatura ϕ_t , all'intervallo Δt e all'area del rettangolo $\Delta x \Delta y$. Si ha quindi:

$$\Delta Q = \rho c \phi_t(x, y, t) \Delta x \Delta y \Delta t, \quad (2.1.1)$$

dove ρ è la densità e c è il calore specifico, che sono delle costanti che dipendono dal materiale di cui è fatta la piastra.

Infatti, considerando il rettangolo come in figura



e denotando con k il coefficiente termico, abbiamo che:

il calore che entra dal lato 1 è:

$$-k\Delta y\phi_x(x, y, t)\Delta t$$

il calore che entra dal lato 2 è:

$$k\Delta y\phi_x(x + \Delta x, y, t)\Delta t$$

il calore che entra dal lato 3 è:

$$-k\Delta x\phi_y(x, y, t)\Delta t$$

il calore che entra dal lato 4 è:

$$k\Delta x\phi_y(x, y + \Delta y, t)\Delta t.$$

Per quanto riguarda il segno, bisogna tener conto del fatto che affinché il calore passi da un punto A ad un punto B, la temperatura in B deve essere minore di quella di A. Quindi, il calore che complessivamente entra nel rettangolo è:

$$\Delta Q = k\Delta y\Delta t[\phi_x(x + \Delta x, y, t) - \phi_x(x, y, t)] + k\Delta x\Delta t[\phi_y(x, y + \Delta y, t) - \phi_y(x, y, t)].$$

Applicando il Teorema della media di Lagrange si trova:

$$\Delta Q = k\Delta y\Delta t\phi_{xx}(x + \alpha\Delta x, y, t)\Delta x + k\Delta x\Delta t\phi_{yy}(x, y + \beta\Delta y, t)\Delta y, \quad (2.1.2)$$

con α e β compresi tra zero e uno. Uguagliando i valori di ΔQ in (2.1.1) e in (2.1.2) e semplificando si ottiene:

$$k\phi_{xx}(x + \alpha\Delta x, y, t) + k\phi_{yy}(x, y + \beta\Delta y, t) = \rho c\phi_t(x, y, t).$$

Dividendo per k e facendo tendere Δt a zero si ottiene l'equazione cercata:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = K\phi_t, \text{ con } K = \frac{\rho c}{k}.$$

Se il corpo non ha simmetria piana, si trova l'equazione:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = K\phi_t \quad (2.1.3)$$

che è l'equazione del calore di un corpo omogeneo in tre dimensioni.

Se inoltre, all'interno del corpo vi sono sorgenti di calore, la (2.1.3) diventa:

$$f + \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = K\phi_t,$$

dove $f = f(x, y, z, t)$ rappresenta la densità di calore prodotta nel punto considerato.

Un caso molto interessante della (2.1.3) lo si ha quando in ogni punto (x, y, z) del corpo, la temperatura non cambia col passare del tempo, cioè quando siamo in un regime stazionario, perciò $\phi_t = 0$. Allora, la (2.1.3) diventa:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0. \quad (2.1.4)$$

Questa equazione può rappresentare anche altri fenomeni fisici oltre alla propagazione del calore.

Ad esempio, nel caso di una massa d'acqua che si muove in regime stazionario come l'acqua di un fiume che scorre senza turbolenza, si dimostra che la velocità V delle particelle d'acqua in un punto (x, y, z) è il gradiente di una certa funzione $\phi(x, y, t)$, cioè

$$V = \nabla\phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z).$$

Dal fatto che l'acqua è incomprimibile, ne segue che la divergenza del campo vettoriale V deve essere nulla:

$$\operatorname{div} V = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0$$

cioè, la funzione ϕ detta *potenziale di velocità*, soddisfa l'equazione (2.1.4).

Nel caso unidimensionale, l'equazione del calore assume la forma:

$$\phi_{xx} - \phi_t = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (2.1.5)$$

che descrive l'andamento della temperatura in una sbarra col passare del tempo purché il calore si propaghi solamente lungo l'asse, cioè la sbarra deve essere isolata in modo tale che il calore non si diffonda lungo le pareti laterali.

Per determinare la soluzione di questo problema occorre conoscere la temperatura iniziale della sbarra e la temperatura o il flusso del calore negli estremi in ogni istante. Occorre quindi aggiungere all'equazione (2.1.5) la condizione iniziale

$$\phi(x, 0) = f(x) \quad (2.1.6)$$

e le condizioni al contorno

$$\begin{cases} \phi(0, t) = h(t) \\ \phi(L, t) = k(t) \end{cases} \quad (2.1.7)$$

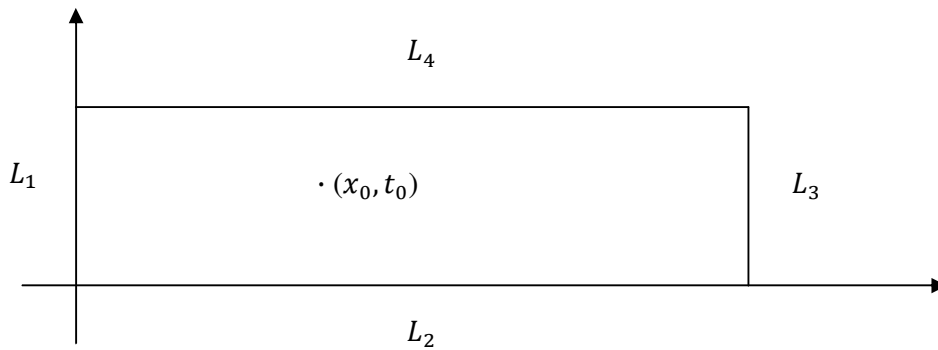
Mostriamo che il problema

$$\begin{cases} \phi_{xx} - \phi_t = 0, & 0 < x < L, & t > 0, \\ \phi(x, 0) = f(x) \\ \phi(0, t) = h(t) \\ \phi(L, t) = k(t) \end{cases} \quad (2.1.8)$$

è ben posto, cioè ammette esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati.

Teorema 2.1.1 (Principio di massimo). *Ogni soluzione continua $\phi(x, t)$ dell'equazione (2.1.5) nel rettangolo $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$ assume il massimo o sulla base $t = 0$ o su uno dei lati $x = 0, x = L$. Lo stesso risultato vale per il minimo.*

Dimostrazione. Consideriamo la seguente figura:



Vogliamo dimostrare che il massimo di $\phi(x, t)$ nel rettangolo Ω è assunto su uno dei lati L_1, L_2, L_3 . Procediamo per assurdo. Sia $\max_{L_1 \cup L_2 \cup L_3} \phi(x, t) = m$ e sia (x_0, t_0) un punto interno di Ω oppure appartenente a L_4 tale che $\phi(x_0, t_0) = M$, con $M > m$. Definiamo la funzione ausiliaria $v(x, t) = \phi(x, t) + (M - m) \frac{(x - x_0)^2}{2L^2}$ (2.1.9). Essendo $(x - x_0)^2 < L^2$ si ha

$$\max_{L_1 \cup L_2 \cup L_3} v(x, t) \leq \max_{L_1 \cup L_2 \cup L_3} \phi(x, t) + \frac{M - m}{2} = m + \frac{M - m}{2} = \frac{M + m}{2} < M.$$

D'altra parte, $\phi(x_0, t_0) = M$. Pertanto anche $v(x, t)$ assume il massimo o all'interno di Ω oppure sul lato L_4 . Nel punto in cui $v(x, t)$ assume il massimo, deve essere $v_{xx} \leq 0$; inoltre, se tale punto è interno deve essere $v_t = 0$, mentre, se esso appartiene a L_4 , deve risultare $v_t \geq 0$. In ogni caso, nel punto di massimo si deve avere $v_{xx} - v_t \leq 0$ (2.1.10). D'altra parte, dalla (2.1.9) e dalla (2.1.5) si ottiene:

$$v_{xx} - v_t = \phi_{xx} - \phi_t + \frac{M-m}{L^2} = \frac{M-m}{L^2} > 0,$$

in contrasto con la (2.1.10).

Per quanto riguarda il minimo basta applicare il risultato precedente alla funzione $-\phi(x, t)$ che è ancora soluzione della equazione di partenza. ■

Teorema 2.1.2 (Unicità). *Il problema (2.1.8) ammette al più una soluzione nel rettangolo*

$$\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}.$$

Dimostrazione. Siano ϕ e ψ due soluzioni del problema e sia $u = \phi - \psi$. Dalla (2.1.5) segue

$$u_{xx} - u_t = \phi_{xx} - \phi_t - (\psi_{xx} - \psi_t) = 0 \text{ in } \Omega.$$

La funzione $u(x, t)$ è quindi ancora soluzione dell'equazione (2.1.5). Inoltre, dalle (2.1.6) e (2.1.7) segue che

$$u(x, 0) = \phi(x, 0) - \psi(x, 0) = f(x) - f(x) = 0,$$

$$u(0, t) = \phi(0, t) - \psi(0, t) = h(t) - h(t) = 0,$$

$$u(L, t) = \phi(L, t) - \psi(L, t) = k(t) - k(t) = 0 \text{ in } \Omega.$$

La funzione $u(x, y)$ è perciò nulla sui lati L_1, L_2, L_3 del rettangolo Ω . Per il Teorema 2.1.1 deve essere $u(x, y) = 0$ su tutto Ω , quindi $\phi = \psi$. ■

Teorema 2.1.3 (Dipendenza continua dai dati). *Si abbiano i due seguenti problemi nello stesso rettangolo Ω del piano (x, t) :*

$$\begin{cases} \phi_{xx} - \phi_t = 0, & \phi(x, 0) = f(x) \\ \phi(0, t) = h(t), & \phi(L, t) = k(t), \end{cases} \quad (2.1.11)$$

$$\begin{cases} \psi_{xx} - \psi_t = 0, & \psi(x, 0) = g(x), \\ \psi(0, t) = r(t), & \psi(L, t) = s(t), \end{cases} \quad (2.1.12)$$

dove f, g, h, k, r ed s sono funzioni continue e tali da verificare (per un ε positivo) le disuguaglianze

$$\begin{cases} -\varepsilon \leq f(x) - g(x) \leq \varepsilon, \\ -\varepsilon \leq h(t) - r(t) \leq \varepsilon, \\ -\varepsilon \leq k(t) - s(t) \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (2.1.13)$$

Quindi, se ϕ e ψ sono due funzioni $\mathcal{C}^2(\Omega)$ soluzioni di (2.1.11) e (2.1.12) rispettivamente, si ha

$$-\varepsilon \leq \phi(x, t) - \psi(x, t) \leq \varepsilon$$

in ogni punto di Ω .

Dimostrazione. Posto $u = \phi - \psi$, dalle (2.1.11) e (2.1.12) segue che:

$$u_{xx} - u_t = 0 \text{ in } \Omega,$$

$$u(x, 0) = f(x) - g(x),$$

$$u(0, t) = h(t) - r(t),$$

$$u(L, t) = k(t) - s(t).$$

Perciò $u(x, t)$ è soluzione dell'equazione (2.1.5) in Ω e, per le (2.1.13), essa è compresa tra $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$ sui lati L_1, L_2 e L_3 della frontiera $\partial\Omega$.

Per il Teorema 2.1.1, $u(x, t) = \phi(x, t) - \psi(x, t)$ è compresa tra $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$ su tutto Ω . ■

Teorema 2.1.4 (Esistenza nel caso $h(t) = k(t) = 0$). Sia dato il problema

$$\begin{cases} \phi_{xx} - \phi_t = 0, \\ \phi(x, 0) = f(x), 0 < x < \pi, \\ \phi(0, t) = \phi(\pi, t) = 0, t > 0. \end{cases} \quad (2.1.14)$$

Se $f(x)$ è sviluppabile in serie di Fourier, allora il problema (2.1.14) ammette una soluzione.

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre $L = \pi$ in quanto ci si può ricondurre a questo caso ponendo $\xi = x\pi/L$ e $\tau = t(\pi/L)^2$. Ponendo $\phi(x, t) = u(x)v(t)$ nella prima delle (2.1.14), si

trova: $u''v - uv' = 0$. Dividendo per uv si ottiene: $\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{v'(t)}{v(t)}$.

Siccome x e t sono variabili indipendenti, i precedenti rapporti devono essere costanti, quindi possiamo scrivere:

$$u'' + \lambda^2 u = 0 \quad (2.1.15)$$

$$v' + \lambda^2 v = 0 \quad (2.1.16)$$

con λ costante. Risolvendo la (2.1.15) si trova

$$u(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x), \quad (2.1.17)$$

con A e B costanti.

Per le ultime due condizioni in (2.1.14), deve essere

$$u(0)v(t) = u(\pi)v(t) = 0$$

per ogni $t > 0$. Deve perciò essere $u(0) = u(\pi) = 0$. Queste ultime condizioni sono verificate se in (2.1.17) si prende $A = 0$ e $\lambda = n$ ($n \in \mathbb{N}$). La (2.1.17) diventa

$$u(x) = B \sin(nx). \quad (2.1.18)$$

Risolvendo la (2.1.16) con $\lambda = n$ si ottiene

$$v(t) = C e^{-n^2 t} \quad (2.1.19)$$

con C costante.

Essendo $\phi(x, t) = u(x)v(t)$, dalle (2.1.18)-(2.1.19) segue

$$\phi(x, t) = b_n \sin(nx) e^{-n^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1.20)$$

dove b_n sono costanti arbitrarie. Ciascuna delle funzioni (2.1.20) (per n fissato) soddisfa la prima e la terza riga di condizioni in (2.1.14). Per soddisfare anche la seconda condizione, consideriamo la serie di tutte le soluzioni (2.1.20). Avremo

$$\phi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) e^{-n^2 t}. \quad (2.1.21)$$

Perché sia verificata la seconda condizione in (2.1.14) deve essere

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = f(x). \quad (2.1.22)$$

La funzione $f(x)$ è definita in $(0, \pi)$. Se la estendiamo in $(-\pi, 0)$, ponendo $f(-x) = -f(x)$

(in modo che la funzione estesa sia dispari), la serie (2.1.22) rappresenta lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x)$.

La (2.1.22) è soddisfatta per

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi) \sin(n\xi) d\xi. \quad (2.1.23)$$

Si dimostra facilmente che scegliendo i b_n dati dalle (2.1.23) la serie (2.1.21) è derivabile termine a termine due volte rispetto alla x e una volta rispetto alla t ed è totalmente convergente. Tale serie rappresenta dunque una soluzione del problema (2.1.14). ■

Teorema 2.1.5 (Esistenza nel caso $f(x) = 0$). *Sia dato il problema*

$$\begin{cases} \phi_{xx} - \phi_t = 0, \\ \phi(x, 0) = 0, 0 < x < \pi, \\ \phi(0, t) = h(t), \phi(\pi, t) = k(t), t > 0 \end{cases} \quad (2.1.24)$$

con $h(t)$ e $k(t)$ continue. Il problema (2.1.24) ammette una soluzione.

Dimostrazione. Cerchiamo una soluzione del tipo

$$\phi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(nx). \quad (2.1.25)$$

Per t fissato la serie precedente è lo sviluppo in serie di Fourier di $\phi(x, t)$, perciò deve essere

$$u_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \phi(x, t) \sin(nx) dx. \quad (2.1.26)$$

Le condizioni $\phi(0, t) = h(t)$, $\phi(\pi, t) = k(t)$ vanno intese nel senso seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(nx)) = h(t),$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(nx)) = k(t).$$

Dalla (2.1.26) segue

$$u'_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \phi_t(x, t) \sin(nx) dx. \quad (2.1.27)$$

Per calcolare $u_n(t)$ moltiplichiamo la prima delle (2.1.24) per la funzione $2\pi^{-1} \sin(nx)$ e integriamo su $[0, \pi]$. Si trova

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \phi_{xx}(x, t) \sin(nx) dx \\ & - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \phi_t(x, t) \sin(nx) dx = 0. \end{aligned}$$

Integrando per parti e utilizzando la (2.1.27) si ha

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \phi_x(x, t) \sin(nx) \Big|_{x=0}^{x=\pi} \\ & - \frac{2}{\pi} n \int_0^{\pi} \phi_x(x, t) \cos(nx) dx - u'_n(t) = 0. \end{aligned}$$

Integrando ancora per parti si ottiene

$$\begin{aligned} & - \frac{2}{\pi} n \phi(x, t) \cos(nx) \Big|_{x=0}^{x=\pi} \\ & - \frac{2}{\pi} n^2 \int_0^{\pi} \phi(x, t) \sin(nx) dx - u'_n(t) = 0. \end{aligned}$$

Utilizzando le ultime condizioni in (2.1.24) e la (2.1.26) si trova

$$- \frac{2}{\pi} nk(t)(-1)^n + \frac{2}{\pi} nh(t) - n^2 u_n(t) - u'_n(t) = 0,$$

ossia

$$u'_n(t) + n^2 u_n(t) = \frac{2}{\pi} n [h(t) - (-1)^n k(t)]. \quad (2.1.28)$$

Dalla seconda riga di (2.1.24) segue

$$u_n(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \phi(x, 0) \sin(nx) dx = 0. \quad (2.1.29)$$

Dall'equazione (differenziale ordinaria) (2.1.28) e dalla condizione iniziale (2.1.29) si ottiene

$$u_n(t) = \frac{2}{\pi} e^{-n^2 t} \int_0^t n [h(\tau) - (-1)^n k(\tau)] e^{n^2 \tau} d\tau.$$

Sostituendo i valori trovati nella (2.1.25) si ha la soluzione del problema (2.1.24). ■

Osservazione 2.1.4: Il problema generale (2.1.8) può essere studiato considerando prima i casi particolari risolti dai Teoremi 2.1.3 e 2.1.4 e poi sommando le soluzioni trovate.

2.2 Equazione non omogenea

Nel caso in cui l'equazione non è omogenea, cioè della forma $\phi_{xx} - \phi_t = K$, con K costante può essere ricondotto al caso omogeneo. Ad esempio, posto $\psi(x, t) = \phi(x, t) + \frac{x(\pi-x)K}{2}$, si trova:

$$\begin{aligned}\psi_{xx} - \psi_t &= K - K = 0, \\ \psi(x, 0) &= f(x) + \frac{x(\pi-x)K}{2}, \quad 0 < x < \pi, \\ \psi(0, t) &= \psi(\pi, t) = 0, \quad t > 0.\end{aligned}$$

Ci siamo così ricondotti al problema omogeneo già studiato.

2.3 L'equazione di diffusione

I processi di diffusione del calore o di diffusione delle particelle in un mezzo sono descritti dalla seguente equazione generale, nota come equazione di diffusione del calore:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t). \quad (2.3.1)$$

Vediamo come si ricava. Denotiamo con $u(x, t)$ la temperatura del mezzo nel punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ all'istante t . Consideriamo il mezzo isotropo e denotiamo con $\rho(x)$, $c(x)$, $k(x)$ rispettivamente la densità, la capacità termica specifica ed il coefficiente di conducibilità termica del mezzo nel punto x . Indichiamo con $F(x, t)$ l'intensità delle sorgenti termiche nel punto x all'istante t . Consideriamo un volume arbitrario V e l'intervallo di tempo $(t, t + \Delta t)$. Indichiamo con S la frontiera di V e sia n una normale esterna alla frontiera. In base alla Legge di Fourier, la quantità di calore in entrata è pari a:

$$Q_1 = \int_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS \Delta t = \int_S (k \operatorname{grad} u \cdot n) dS \Delta t$$

e in base al Lemma di Gauss-Ostrogradskij, deve essere uguale a:

$$Q_1 = \int_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) dx \Delta t.$$

Le sorgenti termiche interne al volume V producono una quantità di calore

$$Q_2 = \int_V F(x, t) dx \Delta t.$$

Durante l'intervallo di tempo $(t, t + \Delta t)$, la variazione di temperatura è data da:

$u(x, t + \Delta t) - u(x, t) \simeq \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t$, che determina una quantità di calore data da:

$$Q_3 = \int_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx \Delta t.$$

D'altra parte, $Q_3 = Q_1 + Q_2$, ne segue:

$$\int_V [\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F - c\rho \frac{\partial u}{\partial t}] dx \Delta t = 0,$$

da cui, essendo V del tutto arbitrario, si ottiene l'equazione di diffusione del calore

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t). \quad (2.3.1)$$

Se il mezzo è anche omogeneo, cioè ρ, c, k sono costanti, l'equazione (2.3.1) assume la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \quad (2.3.2)$$

dove $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ e $f = \frac{F}{c\rho}$. L'equazione (2.3.2) è detta equazione di conduzione termica.

Per una completa descrizione del processo di diffusione del calore, si deve assegnare la distribuzione iniziale della temperatura u nel mezzo (condizione iniziale) e il comportamento del mezzo nella frontiera (condizioni al contorno).

a) Nel caso in cui la temperatura sulla frontiera S rimanga costante, abbiamo:

$$u|_S = u_0. \quad (2.3.3)$$

b) Se sulla frontiera viene mantenuto un certo flusso di calore u_1 , si ha allora:

$$-k \frac{\partial u}{\partial n} |_S = u_1. \quad (2.3.4)$$

c) Se su S ha luogo lo scambio di calore, secondo la Legge di Newton, si ha

$$k \frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_0)|_S = 0, \quad (2.3.5)$$

dove h è il coefficiente di scambio del calore ed u_0 è la temperatura dell'ambiente.

Invece, per quanto riguarda il flusso di particelle attraverso un elemento di superficie ΔS per unità di tempo, si ha: $\Delta Q = -D \frac{\partial u}{\partial n} \Delta S$, dove $D(x)$ è il coefficiente di diffusione ed $u(x, t)$ è la densità di particelle nel punto x all'istante t . L'equazione per la densità u è della forma (2.3.1) dove ρ denota il coefficiente di porosità, $p = D$ e q caratterizza l'assorbimento del mezzo.

2.4 Equazione stazionaria

Per i processi stazionari $F(x, t) = F(x)$, $u(x, t) = u(x)$, l'equazione di diffusione del calore assume la forma

$$- \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = F(x). \quad (2.4.1)$$

Per $p = \text{costante}$ e $q = 0$, l'equazione (2.4.1) è detta *equazione di Poisson*:

$$\Delta u = -f, f = \frac{F}{p}. \quad (2.4.2)$$

Osserviamo che per $f = 0$, otteniamo l'equazione di Laplace $\Delta u = 0$.

Un processo stazionario è completamente determinato se è fissata una delle condizioni al bordo (2.3.3)-(2.3.5).

2.5 L'equazione di trasporto

Se la lunghezza del percorso libero delle particelle è molto più grande delle loro dimensioni, per descrivere il processo di propagazione delle particelle, al posto dell'equazione di diffusione è utilizzata la cosiddetta equazione del trasporto (equazione cinetica). Scriviamo le equazioni del trasporto sotto le seguenti ipotesi:

Le velocità delle particelle sono tutte uguali a v .

- 1) Si possono trascurare le collisioni tra le particelle.

- 2) Le particelle collidono con i nuclei immobili del mezzo ed $l(x)$ è la lunghezza media del percorso libero nel punto x .
- 3) Quando una particella collide con un nucleo immobile nel punto x , ha luogo uno degli eventi:
- la particella viene diffusa dal nucleo con probabilità $p_1(x)$ rimbalzando da questo nucleo come una pallina elastica;
 - la particella viene catturata dal nucleo con la probabilità $p_2(x)$;
 - la particella divide il nucleo con probabilità $p_3 = 1 - p_1 - p_2$ e di conseguenza appaiono $v(x) \geq 1$ particelle simili. Si suppone in questo caso che la particella che divide il nucleo sparisca;
 - la distribuzione delle particelle rispetto alle direzioni è uniforme (isotropa) sia dopo la diffusione che dopo la divisione.

Denotiamo con $n(x, s, t)$ la densità delle particelle nel punto x che volano nella direzione $s = (s_1, s_2, s_3)$, $|s| = 1$, all'istante t e con $F(x, s, t)$ la densità delle sorgenti. In questo caso la funzione $\psi = vn$, flusso delle particelle, verifica la seguente equazione integro-differenziale:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} + (s \cdot \text{grad } \psi) + \alpha \psi = \frac{\alpha h}{4\pi} \int_{S_1} \psi(x, s', t) ds' + F, \quad (2.5.1)$$

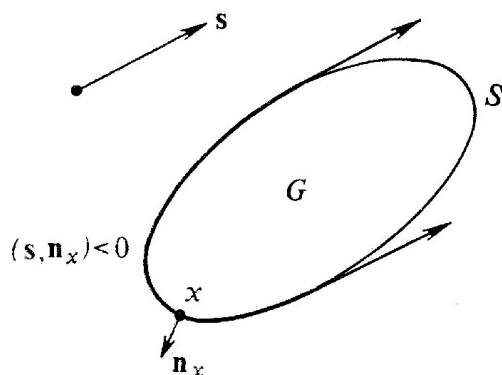
dove $\alpha = \frac{1}{l}$ e $h = p_1 + vp_3$. Questa è l'equazione del trasporto a velocità unica per i processi a diffusione isotropa.

Se il processo di trasporto è stazionario, cioè $F(x, s, t) = f(x, s)$ e $\psi(x, s, t) = \psi(x, s)$, l'equazione del trasporto (2.5.1) assume la forma

$$(s \cdot \text{grad } \psi) + \alpha \psi = \frac{\alpha h}{4\pi} \int_{S_1} \psi(x, s') ds' + f. \quad (2.5.2)$$

Il processo di trasporto delle particelle è completamente definito se si assegna la distribuzione iniziale del flusso di particelle ψ nel mezzo (condizione iniziale) ed il regime del comportamento sulla frontiera di questo mezzo (condizione al bordo). Per esempio, se la regione G dove ha luogo il processo di trasporto è convessa, una condizione al bordo della forma

$\psi(x, s, t) = 0, x \in S, (s \cdot n_x) < 0$, esprime l'assenza di flusso di particelle incidente sulla regione G dall'esterno.



L'equazione del trasporto è molto importante in quanto descrive il trasporto dei neutroni in un reattore nucleare, il trasporto di energia radiante, il passaggio di quanti γ attraverso una sostanza, il moto di un gas ed altri processi fisici.

2.6 Soluzione fondamentale dell'equazione del calore

Vogliamo trovare la soluzione fondamentale dell'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = \delta \text{ in } \mathbb{R}^{n+1}, \quad (2.6.1)$$

dove δ è la funzione δ di Dirac tale che: $\delta(x) = 0$, se $x \neq 0$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$.

Effettuando una trasformata di Fourier rispetto alla variabile spaziale x , in base alla formula:

$\tilde{f}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} f(x, t) dx$, l'equazione (2.6.1) diventa:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + |\xi|^2 \tilde{f} = \delta(t). \quad (2.6.2)$$

Allora, una soluzione fondamentale della (2.6.2) è data da: $\tilde{u}(x, t) = U(t) \exp(-t|\xi|^2)$, $t \neq 0$.

Applicando la trasformata di Fourier inversa, in base alla formula:

$f(x, t) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} \tilde{f}(\xi, t) d\xi$, supponendo $t > 0$ e ponendo $\tilde{f}(\xi, t) = \tilde{u}(x, t) =$

$\exp(-t|\xi|^2)$, otteniamo:

$$f(x, t) = u(x, t) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle x, \xi \rangle - t|\xi|^2) d\xi = \left\{ \prod_{j=1}^n (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \exp[-t(\xi_j - i\frac{x_j}{2t})^2] d\xi_j \right\} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

Sia z la variabile complessa nel piano di Gauss e consideriamo l'integrale:

$$I = \int_{\gamma} \exp(-tz^2) dz, \text{ dove } \gamma \text{ è una qualunque retta orizzontale di equazione } \Im mz = cost = c.$$

L'integrale I è allora indipendente da c , perciò abbiamo:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-t(\Re z)^2] d(\Re z) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \text{ e quindi otteniamo la soluzione fondamentale:}$$

$$u(x, t) = (2\sqrt{\pi t})^{-n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \quad (2.6.3)$$

da cui possiamo facilmente vedere che $u(x, t)$ è la trasformata di Fourier inversa di $\tilde{u}(x, t)$.

Diamo due proprietà principali della soluzione fondamentale (2.6.3):

- $u(x, t)$ è invariante per rotazioni dello spazio, cioè dipende unicamente da $|x|^2$.
- $u(x, t)$ è una funzione $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$.

2.7 Problema misto per l'equazione del calore

Consideriamo un aperto Ω di \mathbb{R}^n limitato da un'ipersuperficie $\Gamma = \partial\Omega$. Supponiamo Ω sia una barra o una piastra metallica e che Γ si trovi ad una certa temperatura g . Vogliamo studiare la temperatura nei diversi punti di Ω che varia nel tempo come il calore si espande dalla superficie verso l'interno. Essa è quindi una funzione $u = u(x, t)$ dello spazio e del tempo e dipende dai suoi valori iniziali, ovvero dalla distribuzione della temperatura all'istante iniziale (generalmente l'origine) in cui iniziamo a riscaldare la superficie esterna Γ . Osserviamo che la temperatura g su Γ , può non essere omogenea nello spazio ma può variare punto per punto e dipendere quindi da x e dal tempo t , cioè è una funzione $g = g(x, t)$. Abbiamo già visto nel caso di una piastra metallica che la variazione nel tempo e nello spazio della temperatura in Ω , obbedisce all'equazione del calore:

$$u_t - K\Delta u = 0, \quad (2.7.1)$$

valida nel caso in cui il mezzo sia omogeneo (cioè le caratteristiche del materiale non dipendono dal punto né dall'istante considerato), isotropo (cioè la propagazione del calore è la stessa in tutte le direzioni) e non vi siano reazioni chimiche all'interno del materiale che portino alla creazione o all'assorbimento di calore all'interno di Ω . Diversamente, abbiamo visto che l'equazione (2.7.1) assume la forma:

$$u_t - K\Delta u = f. \quad (2.7.2)$$

Sotto queste condizioni appena descritte, abbiamo che:

$$\begin{cases} u_t - K\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = u(x, 0) & \text{in } \Omega \text{ quando } t = 0. \\ u = g(x, t) & \text{su } \Gamma, \forall t > 0 \end{cases} \quad (2.7.3)$$

In questa formulazione del problema riconosciamo la terza condizione essere il tipo di condizione al contorno sulla frontiera del problema di Dirichlet, mentre la seconda condizione risulta essere la condizione iniziale del problema di Cauchy. In virtù di questa doppia analogia, il problema (2.7.3) è spesso chiamato *problema misto*. Inoltre, se al posto di assegnare la temperatura su Γ , fissiamo il flusso del calore su Γ , allora il sistema (2.7.3) rientra nel cosiddetto problema di Neumann. Questo comporta la sostituzione della terza condizione con la seguente:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(x, t) \text{ su } \Gamma, \forall t > 0.$$

Si può inoltre imporre una condizione ibrida sulla frontiera, cioè mantenendo costante il valore della temperatura in una parte della frontiera e nella rimanente fissare il flusso di calore.

Spezziamo quindi la frontiera in questo modo:

$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ con $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, richiedendo quindi le condizioni:

$$u = g(x, t) \text{ su } \Gamma_0 \text{ e}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(x, t) \text{ su } \Gamma_1 \forall t > 0.$$

Capitolo 3

Il problema del corretto dimensionamento di una cantina vinicola

3.1 Le condizioni ideali per la conservazione di un vino

Vediamo quali sono gli elementi che intervengono durante il processo di conservazione di un vino che potrebbero alterarne le caratteristiche ottimali.

A. La temperatura media ottimale per la conservazione.

Il fatto di mantenere la giusta temperatura è sicuramente il fattore più importante nella conservazione di un vino ed è quindi utile andare a studiare la temperatura media da mantenere e le sue eventuali variazioni in relazione anche all'ambiente esterno.

L'equazione di riferimento è la cosiddetta Equazione di Arrhenius che prende il nome dal premio nobel svedese, il chimico Svante Arrhenius che trovò per primo tale equazione:

$$\ln k = \ln A - \frac{E_a}{RT}, \quad (3.1.1)$$

che lega la costante di velocità con la temperatura e in cui:

- k è la costante di velocità che esprime l'andamento di una reazione chimica
- A è il fattore di frequenza, costante per variazioni di temperatura non troppo elevate
- E_a è l'energia di attivazione, anch'essa costante per variazioni di temperatura non troppo elevate
- R è la costante dei gas
- T è la temperatura espressa in kelvin

È noto che in ogni intervallo di 10°C, a seguito di una reazione chimica la temperatura cresce tra il 50% e il 200%. Poiché l'invecchiamento di un vino è la combinazione di più reazioni chimiche, l'Equazione di Arrhenius (3.1.1) risulta indispensabile per arginare il problema della variazione della temperatura.

Intorno ai 10°C, il vino riesce già a invecchiare molto bene e aumentando la temperatura fino a 20°C in pochi anni si raggiunge l'invecchiamento. Innalzando ancora la temperatura a 30°C il vino invecchia in pochi mesi. L'idea di base è dunque quella di tenere la temperatura ad un valore ottimale costante in modo tale che il vino invecchi gradualmente nel tempo.

In un decennio un vino vecchio può arrivare ad avere le caratteristiche organolettiche di uno nuovo se tenuto in maniera costante a queste temperature ottimali.

Le reazioni chimiche che avvengono all'interno di una bottiglia che fanno crescere la temperatura sono molto complicate e procedono a velocità diverse. Per bloccare queste reazioni chimiche si cerca quindi di tenere il vino a temperature più fresche all'interno del range consigliato per ottenere un invecchiamento ottimale della bottiglia durante la conservazione. Così, un vino conservato ad una temperatura di 30°C risulta di qualità inferiore rispetto ad uno tenuto alla temperatura di 13°C. Risulta infatti che la temperatura ideale di conservazione di un vino è appunto di 13°C per un invecchiamento equilibrato e per ottenere un prodotto finale di qualità nel corso della vita media di una persona.

Una temperatura piuttosto bassa di 10°C è quindi perfetta per vini delicati quali il Burgundy, lo Chardonnay, il Pinot Noir e lo Champagne mentre temperature più elevate sui 14°C sono migliori per rossi veramente pregiati quali il Medoc Bordeaux dalla buona annata, il Syrah di prima qualità, il Cabernet e il vino di marca Port.

Occorre tanto impegno se si vogliono far invecchiare questi vini rapidamente e il segreto risiede sempre nei 13°C.

Conservare il vino a temperature più fresche di 10°C non è così dannoso finché non congela. Ci sono comunque tre inconvenienti nel conservare fino alla fine il vino ad una temperatura bassa: innanzitutto, invecchia a stento e non è l'ideale se non lo si beve subito. Tuttavia, è la soluzione migliore se si prevede di lasciarlo alle future generazioni. È anche meglio per gli investitori come testimoniano i risultati dell'asta di un vino di un famoso castello freddo della Scozia. Il secondo inconveniente è che tenere il vino ad una temperatura bassa risulta costoso. La temperatura ambiente nella maggior parte degli Stati Uniti (ad eccezione dell'Alaska!) è sui 10°C o poco più, per cui tenere una temperatura costantemente più fresca comporta un raffreddamento continuo e può risultare costoso. Il terzo eventuale problema che si può riscontrare durante la conservazione a temperature troppo basse è l'incapacità di gestire l'umidità in maniera corretta. Un'adeguata refrigerazione dell'ambiente tende a rendere l'aria asciutta e quindi a risolvere il problema, come vedremo in seguito.

È stato provato che il valore massimo di temperatura per la conservazione di un vino è di circa 18°C, ad eccezione dei vini delicati come il Pinot Noir o i bianchi per i quali tale valore deve essere inferiore come abbiamo già osservato. Temperature più alte, sopra i 21°C sono sufficienti per accelerare i tempi per ottenere il prodotto finale, mentre pochi giorni sugli 27°C o poche ore sui 32°C possono danneggiare definitivamente qualunque vino, anche il più robusto.

Le temperature ideali per la conservazione dei vini sono pertanto:

- Vini rossi: 13-16°C
- Vini bianchi: 10-14°C

- Vini rosati: 10-11°C

B. L'oscillazione della temperatura.

La variazione di temperatura risulta quasi più importante della temperatura media di conservazione per la qualità del vino.

Mediante l'Equazione di Arrhenius, il valore più alto della temperatura all'interno di un ciclo accelera il processo di invecchiamento del vino molto più di un valore basso che invece lo rallenta. Inoltre, le oscillazioni di temperatura muovono l'aria all'interno della bottiglia e il vino si espande non appena si riscalda. Quello che può succedere è che aumentando così la pressione, la bottiglia si stappi. Quindi, o il tappo si muove leggermente verso l'esterno o una piccola quantità di contenuto spinge il tappo. Non appena la bottiglia raffredda, il vino si ritrae e l'aria si comprime all'interno della bottiglia. Eccessive variazioni di temperatura portano piccole quantità d'aria a sostituirsi al vino. Questo porta le vecchie bottiglie a riempirsi fino all'orlo. Poiché l'ossigeno, uno dei gas più reattivi, è l'elemento più dannoso per il vino, le bottiglie che sono sottoposte a ripetute oscillazioni di temperatura tendono a perdere la loro freschezza. Minimizzare la frequenza delle oscillazioni di temperatura è tanto importante quanto minimizzare l'estensione di queste oscillazioni.

Un livello accettabile di oscillazione della temperatura è di circa 7°C attorno alla media annuale. Una variazione di circa 11°C può diventare dannosa se si dovesse verificare giornalmente.

C. L'umidità.

È sicuramente la questione più controversa per il processo di conservazione del vino. Il giudizio prevalente è che un vino dovrebbe essere mantenuto in un ambiente umido per tenere il tappo bagnato e a perfetta tenuta. Alcuni esperti hanno recentemente affrontato questo problema asserendo che finché la bottiglia è conservata

col tappo a contatto col vino, questo rimane bagnato e l'umidità appare insignificante per la conservazione ottimale. Ma altri esperti assaggiatori hanno indicato che i vini conservati ad una temperatura appropriata ma in condizioni asciutte sembrano perdere la loro freschezza. Inoltre, in condizioni asciutte, la parte superiore del tappo che normalmente non è a contatto con il vino si asciuga e quindi si restringe. Questo allenta il tappo almeno leggermente e fa entrare l'aria all'interno della bottiglia che insieme alle oscillazioni di temperatura ne favorisce l'ossidazione. Quindi, conservare il vino in condizioni eccessivamente asciutte diventa un rischio mentre l'umidità è facile e conveniente da creare e controllare.

Per quanto è stato detto, l'umidità è quindi molto meno critica rispetto alla temperatura per mantenere il vino in un range a perfetta tenuta. A livelli inferiori del 50% di umidità relativa si è in condizioni già troppo asciutte, mentre a livelli superiori dell'80% di umidità relativa si creano rischi di muffa. L'intervallo tra il 50% e l'80% di umidità relativa è quindi accettabile. La quantità d'acqua che evapora cresce con l'aumentare della temperatura. La massima quantità che può essere trattenuta ad una particolare temperatura è del 100% dell'umidità relativa. È importante distinguere tra umidità e umidità relativa.

D. La luce.

Si consiglia di conservare il vino in ambienti bui, infatti la luce, almeno per le piccole lunghezze d'onda, abbassa la resistenza del complesso di molecole che vanno a creare le principali sfumature del gusto durante corretto processo di invecchiamento dei vini.

Ma il vetro assorbe la maggior parte dei raggi ultravioletti e in particolare il vetro di color verde scuro assorbe tutti gli altri raggi di lunghezza d'onda piccola. Se si conserva un buon vino in bottiglie chiare, come dei buoni bianchi o degli Champagne, si

consiglia di tenerli in un luogo più buio possibile. Non è ugualmente consigliabile esporre le bottiglie alla normale luce artificiale.

E. La vibrazione.

È opportuno conservare i vini in un ambiente privo di vibrazioni. È stato accuratamente verificato che questo non è così importante per vini che non emettono deposito. Per quelli che invece producono sedimento, l'aspetto più nocivo è l'agitazione di tale deposito prima di servire il vino. Quindi, se l'area di conservazione è soggetta a vibrazioni di piccole entità, è preferibile lasciare il vino per un paio di settimane in un luogo tranquillo prima di servirlo. Ugualmente, la stessa attenzione dovrebbe essere usata ogni volta che si trasporta un vino rosso invecchiato.

F. Gli odori.

Altrettanto importante è conservare il vino in ambienti inodori. Pertanto, occorre assicurarsi che l'ambiente di conservazione non sia stato intonacato da poco o non vi siano conservati solventi o prodotti per cibi aromatici.

Per la gente comune, una cantina quadrata di una vecchia casa con terreno in campagna può essere un luogo ideale per la conservazione del vino purché non vi si conservi anche l'aglio e le cipolle. Infatti, siccome l'aria penetra all'interno del vino e pervade il tappo, ogni odore forte è portato dentro la bottiglia allo stesso tempo.

G. La pulizia.

È un altro fattore non comunemente discusso ma fondamentale. Le bottiglie con capsule e etichette intatte e pulite assumono un valore più alto rispetto a quelle sporche, che presentano muffa, con etichette strappate, o macchiate dall'umidità. Inoltre, gli esemplari ricchi di originalità con confezioni pulite e intatte sono soggette a premi. Contrariamente all'immagine tradizionale di cantine sporche e stantie, ci si prende molto cura della pulizia dell'ambiente di conservazione del vino.

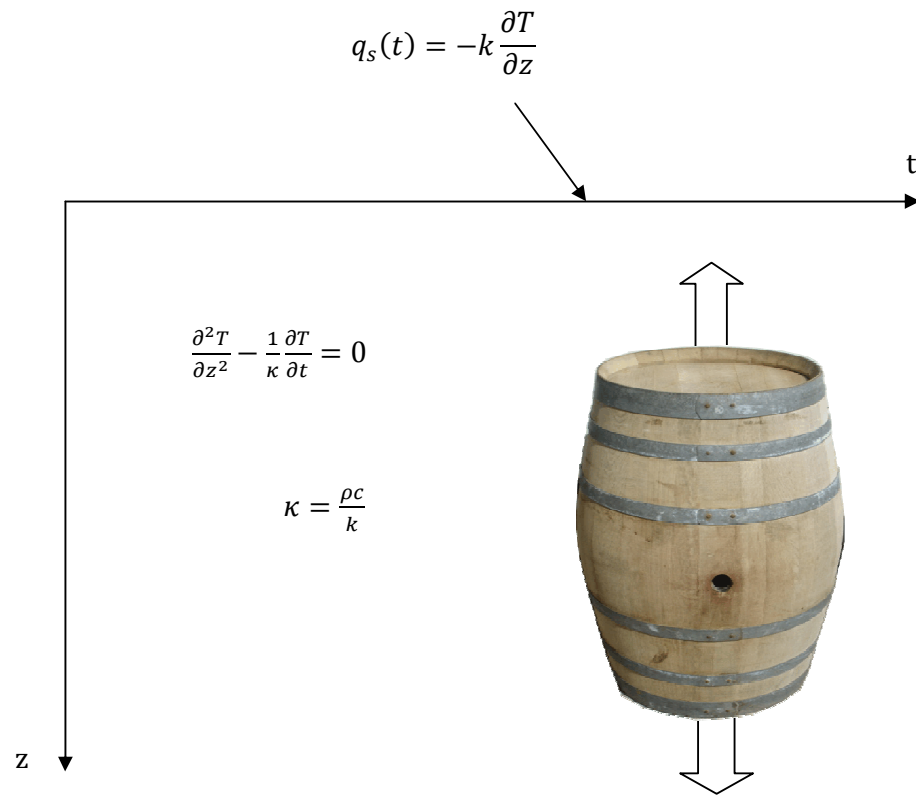
3.2 L'influenza del flusso di calore nell'equazione della temperatura

Abbiamo visto nel capitolo precedente che la forma più semplice del flusso di calore è data dalla Legge di Fourier: $q_s(t) = -k \frac{\partial T}{\partial z}$, dove k è il coefficiente di conducibilità termica ed è sempre positivo così come T . Tutti i materiali obbediscono a questa legge se almeno in prima approssimazione non si riscalda il materiale in maniera eccessiva e rapida. Il flusso di calore $q_s(t)$ è in realtà un vettore e nel nostro caso assumiamo che questo si propaghi unicamente lungo l'asse z .

La conservazione del vino in cantine sotterranee richiede un corretto controllo della temperatura. L'idea è che una buona condizione del suolo ripari il vino dalle variazioni stagionali della temperatura e anche dalle variazioni giornaliere. Chiaramente, le cantine molto profonde hanno questo vantaggio ma la loro costruzione è molto costosa e non è molto pratica da usare e da mantenere in ottime condizioni.

Ci chiediamo quindi in che modo l'emissione del calore che si propaga attraverso la superficie della nostra cantina (rappresentata lungo l'asse t della figura), influisca sulla funzione di temperatura.

Consideriamo come riferimento un semispazio omogeneo semi-infinito, isolato, cioè privo di sorgenti di calore all'interno. Rappresentiamo quindi lungo l'asse t il flusso di calore che attraversa la superficie e indichiamo con z la profondità della cantina.



Il nostro obiettivo è trovare la profondità ottimale di una cantina vinicola per disporre le botti del vino.

Possiamo modellizzare il problema mediante un'equazione 1-dimensionale di diffusione del calore dipendente dal tempo della forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (3.2.1)$$

dove la temperatura risulta essere una funzione del tempo e dello spazio che indichiamo con $T(z, t)$ e $\kappa = \frac{\rho c}{k}$ è il coefficiente di diffusione della Terra.

Assumiamo che il flusso di calore $q_s(t)$ sia una funzione periodica, cioè sia della forma

$$q_s(t) = F_0 e^{-i\omega t} \quad (3.2.2)$$

per cui la condizione iniziale al bordo è espressa mediante l'equazione:

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} = F_0 e^{-i\omega t} \quad (3.2.3)$$

Essendo il flusso di calore una funzione periodica e la (3.2.3) lineare, la soluzione del sistema (3.2.1)-(3.2.3) è della forma:

$$T(z, t) = Af(z)e^{-i\omega t}. \quad (3.2.4)$$

Infatti, sostituendo l'espressione di $T(z, t)$ nell'equazione di diffusione del calore (3.2.1), otteniamo:

$$Ae^{-i\omega t} \left[\left(\frac{d^2 f(z)}{dz^2} \right) - \frac{(-i\omega)}{\kappa} f(z) \right] = 0$$

che diventa pertanto un'equazione ordinaria del secondo ordine:

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \frac{i\omega}{\kappa} f(z) = 0$$

che sappiamo avere soluzione generale della forma:

$$f(z) = ae^{\sqrt{-\frac{i\omega}{\kappa}}z} + be^{-\sqrt{-\frac{i\omega}{\kappa}}z}.$$

Siccome siamo interessati al decadimento esponenziale dell'oscillazione della temperatura al crescere della profondità, scegliamo $a = 0$ e andiamo a considerare esclusivamente il secondo termine di $f(z)$, che sostituito nell'espressione (3.2.4) della temperatura, fornisce:

$$T(z, t) = Af(z)e^{-i\omega t} = Ae^{-\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\frac{\omega}{\kappa}}z} e^{-i\omega t}. \quad (3.2.5)$$

Separando la parte oscillatoria, otteniamo:

$$T(z, t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}z} e^{i\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}z - \omega t\right)}. \quad (3.2.6)$$

Rimane da determinare la costante A per ottenere la soluzione particolare del problema (3.2.1)-(3.2.3) considerato. Deriviamo quindi la quantità (3.2.5) rispetto a z:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -Ae^{-i\omega t} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} e^{-\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\frac{\omega}{\kappa}}z}$$

e imponiamo la condizione al bordo (3.2.3). Otteniamo:

$$kA \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) e^{-i\omega t} = F_0 e^{-i\omega t} \quad e$$

$$kA \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} e^{-i\omega t - i\frac{\pi}{4}} = F_0 e^{-i\omega t},$$

da cui si ricava il valore della costante:

$$A = \frac{F_0}{k} \sqrt{\frac{\kappa}{\omega}} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Quindi, la soluzione cercata che esprime la temperatura sotto l'azione del flusso di calore che penetra attraverso la superficie è:

$$T(z, t) = \frac{F_0}{k} \sqrt{\frac{\kappa}{\omega}} e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}z} e^{i\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}z - \omega t + \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (3.2.7)$$

Confrontando le equazioni dell'onda della temperatura (3.2.7) e del flusso di calore (3.2.2), possiamo notare che le parti oscillatorie differiscono di $\frac{\pi}{4}$.

Questo significa che l'anomalia della temperatura dovuta al flusso di calore sulla superficie, per ogni data profondità, fa tornare indietro il periodo di oscillazione sulla superficie di $1/8$ del periodo di oscillazione presente nell'equazione dell'onda della temperatura.

3.3 La profondità ottimale per una cantina vinicola

L'obiettivo è quello di stimare un'adeguata profondità di una cantina vinicola per ridurre l'anomalia della temperatura che abbiamo appena rilevato, in modo tale da renderne trascurabile l'oscillazione.

Supponiamo che la temperatura di superficie sia descritta dall'onda $T(0, t) = T_0 + A_0 \cos \omega t$, dove A_0 , T_0 e ω sono costanti positive, in particolare $\omega = \frac{2\pi}{t}$ rappresenta la frequenza di variazione della temperatura corrispondente al valore noto iniziale di temperatura sulla superficie, T_0 .

Per esempio, prendendo come periodo di riferimento l'anno, $\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{365 \text{ giorni}} = \frac{2\pi \text{ rad}}{31536000 \text{ sec}} = 1.99 \times 10^{-7} \text{ rad/sec}$.

Vogliamo trovare la profondità ottimale z_0 di una cantina vinicola, ovvero stabilire come occorre dimensionare tale cantina per diversi valori di ω .

Formuleremo poi il problema nel caso in cui l'onda che descrive la temperatura di superficie sia della forma $T(0, t) = T_0 + A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$, dove ω_1 è la frequenza di variazione della temperatura corrispondente al periodo di un anno e ω_2 è la frequenza di variazione della temperatura in riferimento al periodo di un giorno.

Sia $T = U + T_0$. Modellizziamo il problema mediante l'equazione del calore 1-dimensionale della forma: $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Imponendo anche le condizioni al contorno, il modello del nostro problema è espresso mediante il sistema:

$$\begin{cases} U_t - \kappa U_{zz} = 0, 0 < z < \infty, -\infty < t < \infty \\ U(0, t) = A_0 \cos \omega t, -\infty < t < \infty \\ |U(z, t)| < C, 0 \leq z < \infty, -\infty < t < \infty \end{cases}, \quad (3.3.1)$$

dove la temperatura di superficie è data da $T(0, t) = T_0 + A_0 \cos \omega t$ e κ è il coefficiente di diffusione della Terra.

Grazie al principio di sovrapposizione, otteniamo la soluzione:

$$U = \Re\{A_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \alpha z)}\} = A_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \alpha z), \text{ dove } \alpha = \left(\frac{\omega}{2\kappa}\right)^{1/2}.$$

Come possiamo usare questa formula per scegliere la profondità della nostra cantina? Abbiamo già determinato α , mentre κ dipende dalla natura del suolo: può variare di un fattore di 5 o più tra un suolo arido e uno umido. Per i nostri calcoli, assumiamo un valore medio di $\kappa = 2 \times 10^{-7} m^2/sec$, mentre la temperatura terrestre generalmente oscilla intorno ai 20°C.

La temperatura alla profondità z al tempo t è descritta dall'equazione:

$$T(z, t) = T_0 + A_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \alpha z), \text{ dove } \omega = \frac{2\pi}{3,15 \times 10^7} = 1.99 \times 10^{-7} rad/sec \text{ è il valore an-}$$

nuale di riferimento e $\alpha = \left(\frac{\omega}{2\kappa}\right)^{1/2}$.

Vorremmo avere $\alpha z = \pi$, da cui risulta che la profondità ottimale della nostra cantina per un periodo di riferimento annuale per l'invecchiamento del vino è:

$$z_0 = \frac{\pi}{\alpha} = \pi \left(\frac{2\kappa}{\omega} \right)^{1/2} \approx 4,45m.$$

La profondità ottimale z_0 è legata alle condizioni della cantina vinicola descritte precedentemente a cui risulta esposta e in particolare dipende soprattutto da ω e κ , come avremmo modo di osservare in seguito.

Se ω corrisponde a 1 *giorno* = 86400 *secondi*, al posto di un anno, allora $\omega = \frac{2\pi}{86400} = 7.27 \times 10^{-5} rad/sec$ e la profondità ottimale necessaria per smorzare le oscillazioni della temperatura risulta pari a:

$$z_0 = \frac{\pi}{\alpha} = \pi(0,004)^{1/2} \left(\frac{86400}{2\pi} \right)^{1/2} \approx 23,3cm.$$

Nel caso in cui la temperatura di superficie è della forma $T(z, t) = T_0 + A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$, ponendo $T = T_0 + U + V$, il sistema modello del nostro problema diventa:

$$\begin{cases} U_t - \kappa U_{zz} = 0, & V_t - \kappa V_{zz} = 0, & 0 < z < \infty, -\infty < t < \infty \\ U(0, t) = A_1 \cos \omega_1 t, & V(0, t) = A_2 \cos \omega_2 t, & -\infty < t < \infty \\ |U(z, t)| < C, & |V(z, t)| < C, & 0 \leq z < \infty, -\infty < t < \infty \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Analogamente al caso precedente, abbiamo:

$$U = \Re\{A_1 e^{-\alpha_1 z} e^{i(\omega_1 t - \alpha_1 z)}\} = A_1 e^{-\alpha_1 z} \cos(\omega_1 t - \alpha_1 z), \alpha_1 = \left(\frac{\omega_1}{2\kappa} \right)^{1/2},$$

$$V = \Re\{A_2 e^{-\alpha_2 z} e^{i(\omega_2 t - \alpha_2 z)}\} = A_2 e^{-\alpha_2 z} \cos(\omega_2 t - \alpha_2 z), \alpha_2 = \left(\frac{\omega_2}{2\kappa} \right)^{1/2},$$

da cui la temperatura alla profondità z al tempo t è

$$T(z, t) = T_0 + A_1 e^{-\alpha_1 z} \cos(\omega_1 t - \alpha_1 z) + A_2 e^{-\alpha_2 z} \cos(\omega_2 t - \alpha_2 z), \text{ con}$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{3.15 \times 10^7} = 1.99 \times 10^{-7} rad/sec \text{ e } \alpha_1 = \frac{\alpha_2}{\sqrt{365}} = \left(\frac{\omega_1}{2\kappa} \right)^{1/2}.$$

Quindi, se scegliamo come periodo di riferimento l'anno, ritroviamo la profondità ottimale di:

$$z_0 = \frac{\pi}{\alpha_1} = \pi \left(\frac{2\kappa}{\omega_1} \right)^{1/2} \approx 4,45m.$$

3.4 L'equazione della temperatura alla profondità ottimale

Ci proponiamo ora di scrivere l'equazione della funzione temperatura $T(z_0, t)$, alla profondità ottimale z_0 , in modo da evidenziarne le oscillazioni al variare di tale profondità e dunque stabilire quella migliore su cui finalmente costruire la nostra cantina, tenendo anche conto del cosiddetto *effetto pelle* che si verifica nel primo strato della superficie terrestre, in cui la funzione di temperatura decresce con la profondità di un fattore pari a $\frac{1}{e}$.

Consideriamo il valore della temperatura interna alla nostra cantina $T = \frac{1}{e} T_0 = \frac{1}{e} A e^{-i\omega t}$, essendo $T_0 = T(0, t) = A e^{-i\omega t}$, la temperatura sulla superficie esterna. Uguagliando questo va-

lore alla funzione di temperatura trovata precedentemente: $T(z, t) = A e^{-\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} z} e^{-i\omega t}$ (3.2.6)

e risolvendo rispetto a z , otteniamo il valore della profondità ottimale che già abbiamo calcolato nel paragrafo 3.3:

$$z_0 = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}}$$

che dipende esclusivamente da ω e κ . Riscriviamo pertanto l'equazione della temperatura (3.2.7) in funzione della profondità ottimale z_0 trovata:

$$T(z, t) = \frac{F_0}{k} \sqrt{\frac{\kappa}{\omega}} e^{-\frac{z}{z_0}} e^{i\left(\frac{z}{z_0} - \omega t + \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (3.4.1)$$

La scelta ottimale di profondità che abbiamo calcolato, porta a due vantaggi. In primo luogo otteniamo una riduzione dell'ampiezza dell'onda che descrive la temperatura, di un fattore notevole di 23, cioè, con un corretto dimensionamento della cantina che tiene conto delle condizioni climatiche e del suolo di cui si dispone, si riesce a ridurre l'oscillazione della temperatura a 1°C. In secondo luogo, la fase dell'onda a queste profondità risulta esattamente opposta alla fase dell'onda a livello del suolo. Questo è l'effetto desiderabile per smorzare le eccessive oscillazioni della temperatura e limitare i meccanismi di trasferimento del calore, co-

me l'apertura della porta della cantina, che spingono la temperatura della cantina ben oltre il valore iniziale T_0 .

3.5 Studio qualitativo della profondità di una cantina vinicola in base al periodo di riferimento scelto e alle condizioni del suolo al variare della temperatura

Vogliamo studiare ora in che modo occorrerebbe modificare la profondità della cantina in funzione del tempo scelto per l'invecchiamento del nostro vino e in base alle condizioni del suolo in cui si trova la cantina.

Scegliamo tre periodi di tempo principali di riferimento, esaminiamo cioè le profondità ottimali nel considerare le oscillazioni cui è soggetta la temperatura nel corso di un giorno, un anno o in condizioni di freddo intenso e persistente, vale a dire per i tre diversi valori di ω :

- $\omega = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/sec}$, per un periodo giornaliero;
- $\omega = 1.99 \times 10^{-7} \text{ rad/sec}$, per un periodo annuale;
- $\omega = 1.99 \times 10^{-12} \text{ rad/sec}$, per un periodo di centinaia di migliaia di anni.

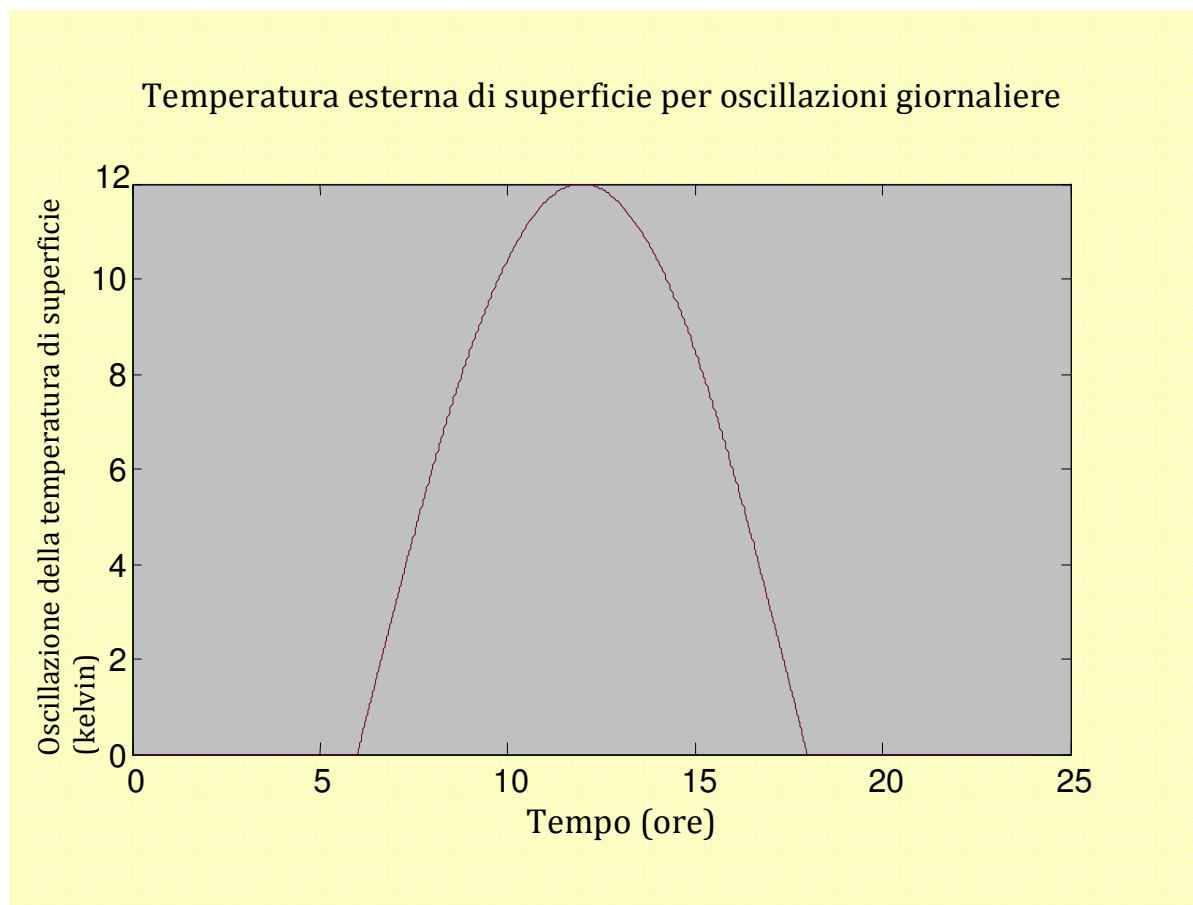
Consideriamo inoltre tre condizioni di riferimento del suolo, ovvero analizziamo i casi di un suolo di tipo argilloso, sabbioso e roccioso che determinano come sappiamo proprietà termiche ben diverse.

A tal proposito, possiamo osservare la seguente tabella:

Valori delle costanti termiche in base alle caratteristiche del suolo

	Suolo Argilloso	Suolo Sabbioso	Suolo Roccioso
k (W/m ² /k)	0.25	0.30	2.90
κ (×10 ⁻⁶ m ² /s)	0.18	0.24	1.43

Se consideriamo come periodo di riferimento un giorno, ed andiamo ad esaminare le oscillazioni della temperatura esterna sulla superficie in funzione del tempo, l'andamento che si ottiene è il seguente:



Si può osservare quindi che durante le ore più calde della giornata, la temperatura subisce forti oscillazioni arrivando a raggiungere a metà giornata una variazione considerevole di 12 gradi.

Per quanto riguarda la regolazione della profondità z_0 di una cantina vinicola, se consideriamo come periodo di riferimento per le oscillazioni di temperatura un solo giorno e tenendo conto delle caratteristiche del suolo, non sono necessarie grandi modifiche in quanto per smorzare le oscillazioni giornaliere occorrerebbe al massimo, per un terreno roccioso, la profondità ottimale di soli 20 cm, come mostra la seguente tabella:

Valori di profondità ottimale per un periodo di invecchiamento giornaliero:

$$\omega = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/sec}$$

	Suolo Argilloso	Suolo Sabbioso	Suolo Roccioso
z_0 (metri)	0.07	0.08	0.20

Se si sceglie come periodo di invecchiamento del vino l'anno, le profondità attenuanti le continue variazioni della temperatura risultano praticabili e, in base alle caratteristiche del terreno, variano mediamente tra 1.4 – 3.8 metri, come mostra la seguente tabella:

Valori di profondità ottimale per un periodo di invecchiamento annuale:

$$\omega = 1.99 \times 10^{-7} \text{ rad/sec}$$

	Suolo Argilloso	Suolo Sabbioso	Suolo Roccioso
z_0 (metri)	1.35	1.55	3.79

Per capire quanto sia importante regolare l'oscillazione della temperatura mediante la profondità della cantina, consideriamo una situazione estrema di un periodo di invecchiamento eccessivamente lungo, relativamente al terzo valore di ω di riferimento che abbiamo considerato, di circa 100.000 anni. Si osserva che, in questo caso, una regolazione opportuna della profondità della cantina risulterebbe impraticabile a parità di caratteristiche del suolo, in quanto dovremmo costruire una cantina profonda anche oltre un kilometro, come conferma la seguente tabella:

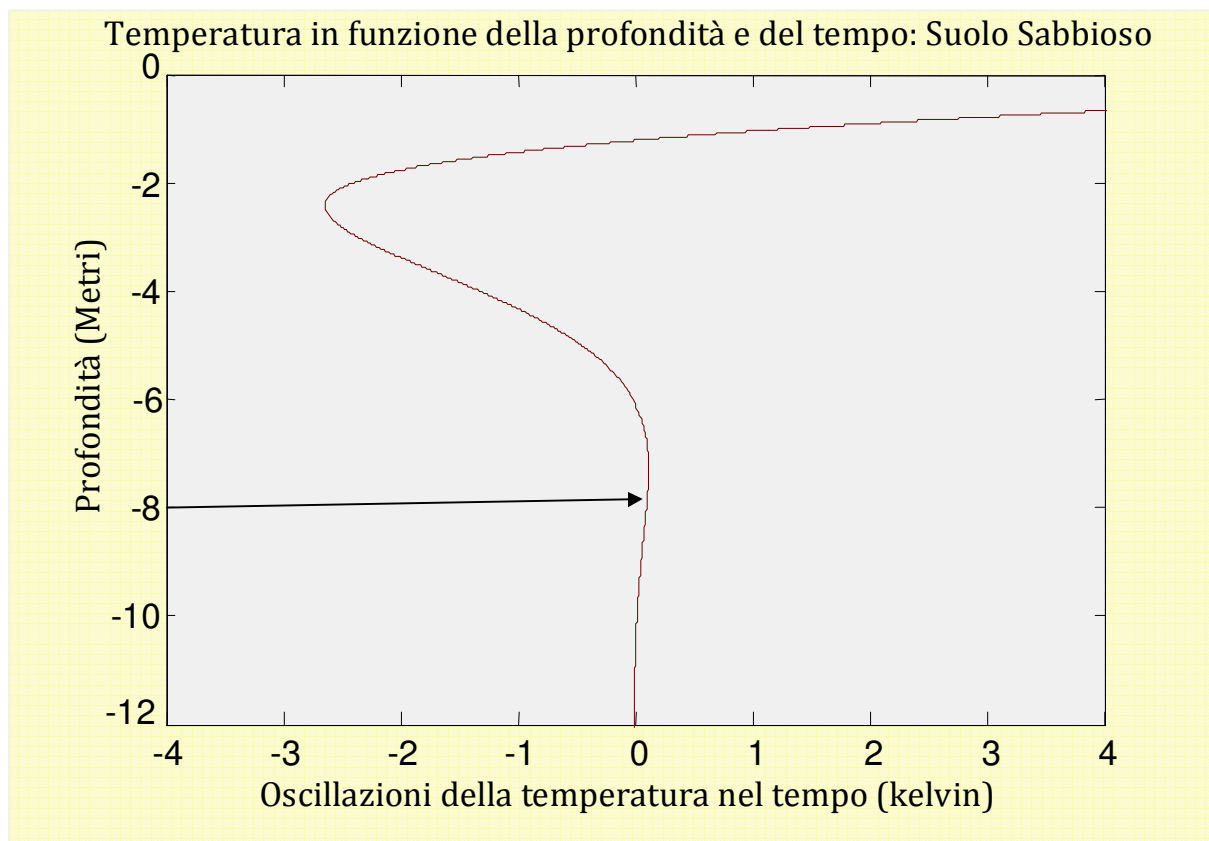
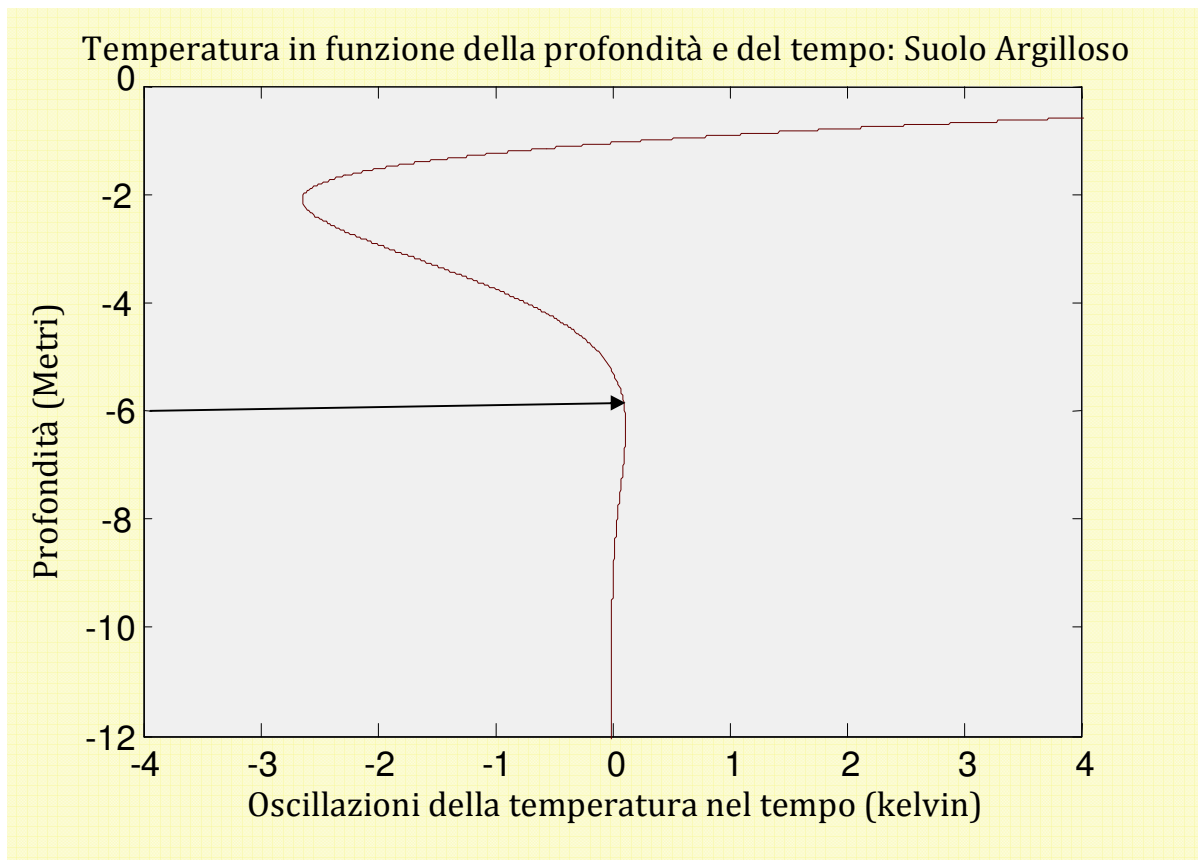
Valori di profondità ottimale per un periodo esagerato di invecchiamento:

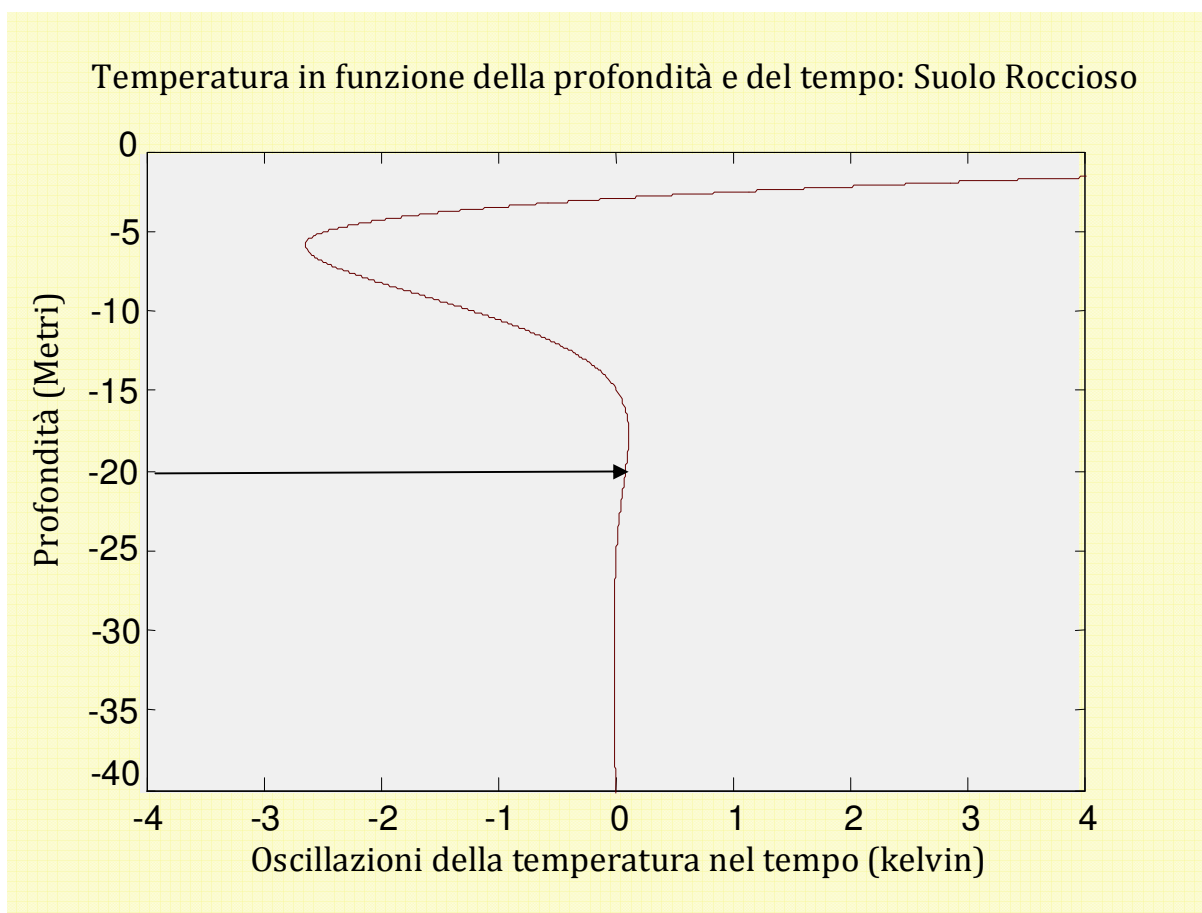
$$\omega = 1.99 \times 10^{-12} \text{ rad/sec}$$

	Suolo Argilloso	Suolo Sabbioso	Suolo Roccioso
z_0 (metri)	425	491	1199

Consideriamo infine i tre principali tipi di suolo come riferimento e scegliamo una zona di produzione di vino in Sardegna quale Oliena, dove la temperatura media annuale risulta essere quella ideale, cioè di 13°C e dove si registrano sostanziali variazioni di temperatura durante il periodo di invecchiamento annuale considerato.

Riportiamo quindi i rispettivi grafici relativi alle profondità ottimali nelle tre diverse condizioni del suolo scelte per un valore annuo di $\omega = 1.99 \times 10^{-7} \text{ rad/sec}$.



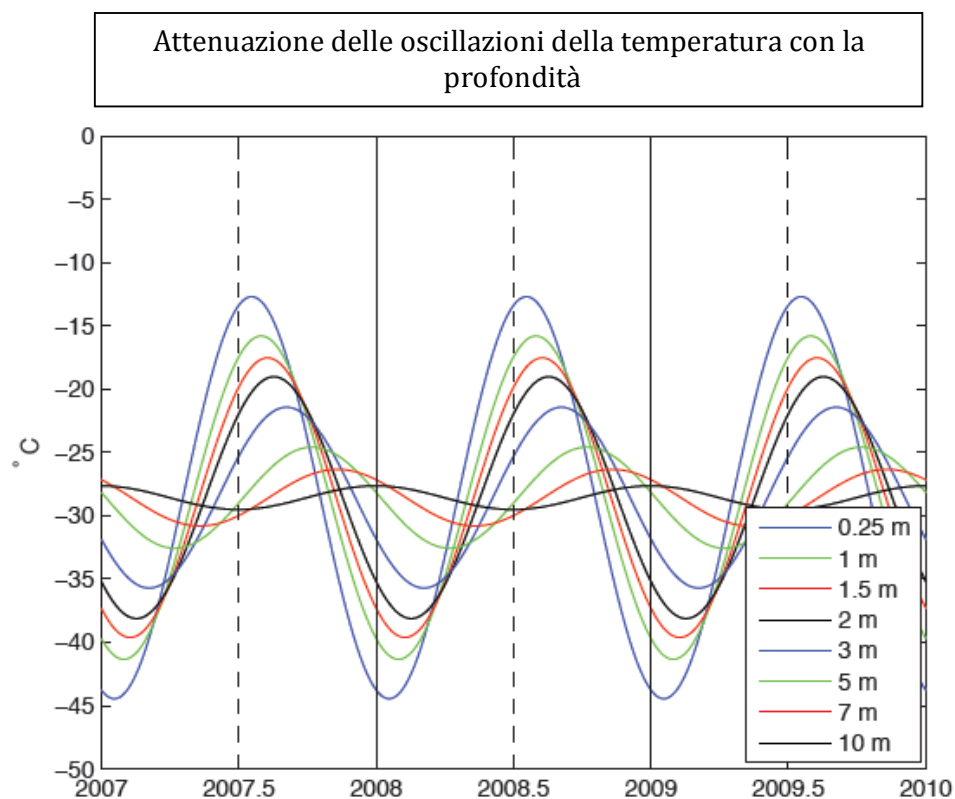


Scegliendo le condizioni ottimali per la conservazione del vino che abbiamo descritto nel corso del capitolo 3, dai grafici appena forniti notiamo che per un terreno argilloso, la profondità ottimale risulta essere di oltre 6m, per un suolo sabbioso è invece di quasi 8m e infine per un terreno roccioso soggetto a forti variazioni di temperatura occorrerebbe fornire alla nostra cantina una profondità di oltre 20m.

Conclusion

Abbiamo osservato finora che, per tenere la temperatura dell'ambiente di conservazione del vino costantemente uguale alla temperatura ottimale di 13°C, la profondità di una cantina vinicola risulta decisamente importante per il processo di invecchiamento, in quanto si riesce a far fronte alle oscillazioni anche giornaliere della funzione temperatura.

Riportiamo infine un grafico che evidenzia l'importanza del corretto dimensionamento di una cantina vinicola anche in condizioni climatiche di freddo persistente durante tutto il periodo. Si possono leggere nel grafico i diversi valori in metri con cui regolare la profondità della cantina nel tentativo di attenuare le oscillazioni della funzione temperatura che si verificano nel corso del processo di invecchiamento annuale. Per cantine vinicole situate quasi in superficie, in cui la funzione temperatura assume valori oltre i 10 gradi sotto lo zero, si osserva come, intervenendo sulla profondità della cantina e al crescere di essa, si riesca ad attenuare maggiormente le frequenti oscillazioni di temperatura.



Bibliografia

- [1] Equazioni della Fisica Matematica - V. S. Vladimirov – Libreria Italia Urss
- [2] Basic linear partial differential equations - François Trèves – Academic Press
- [3] An introduction to partial differential equations - Yehuda Pinchover, Jacob Rubinstein – Cambridge Press
- [4] Appunti di Fondamenti di Analisi Superiore 2 – Prof. Porru – Università degli Studi di Cagliari
- [5] Joseph Fourier, Hier et Aujourd’hui – Université Joseph Fourier

Sitografia

- [1] <http://www.brentwoodwine.com/invest/storing1098.html>
- [2] http://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_di_Arrhenius
- [3] http://topex.ucsd.edu/geodynamics/HW3_2010_presentations/C_wine_cellar.pdf
- [4] <http://www.sardegnaambiente.it>