UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di laurea

LA FUNZIONE DELTA E ALCUNE APPLICAZIONI

Relatore
Prof. Lucio Cadeddu

Candidato
Cristina Cambedda

A.A. 2010/2011

La funzione $\delta(t)$ fu introdotta dal fisico Paul Dirac nella sua opera «Principi di meccanica quantistica», del 1930.

La teoria fu sviluppata a partire da Sobolev nel 1936, e successivamente da Schwartz.

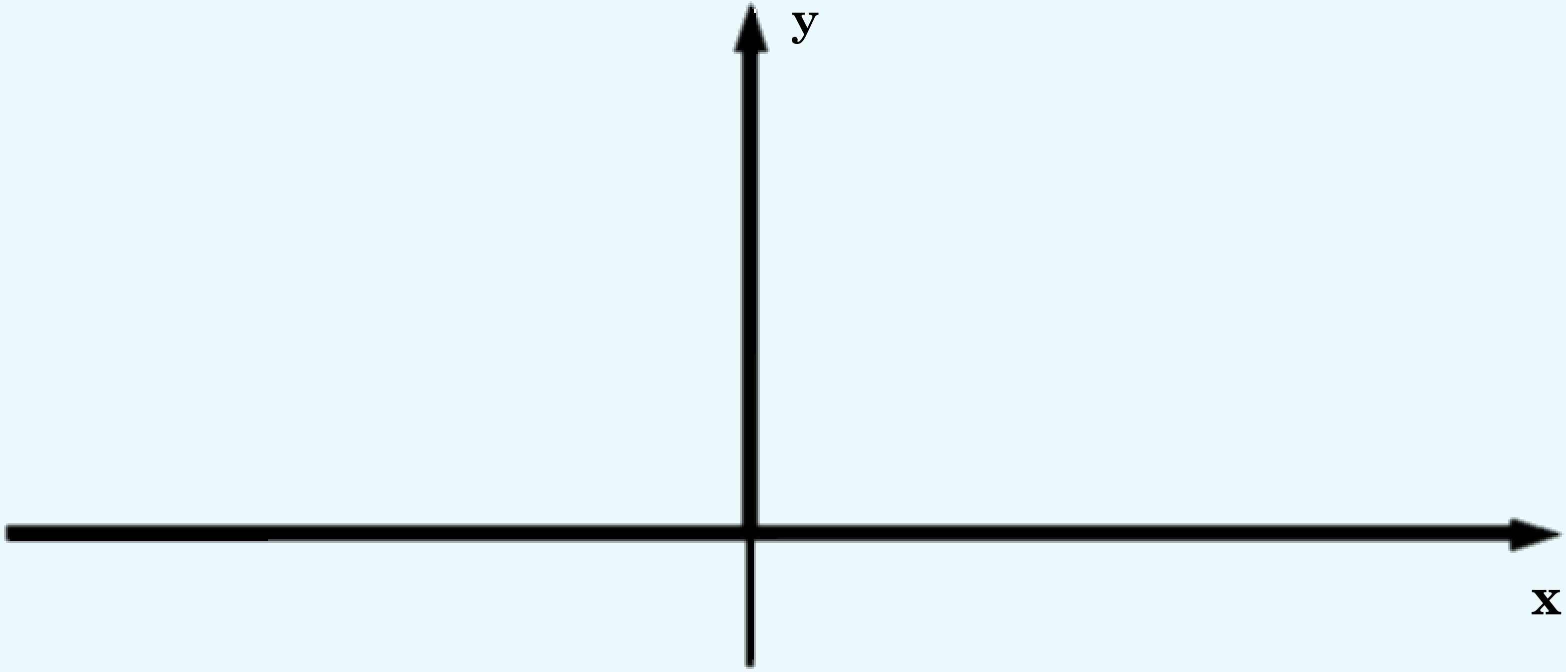
Definizione

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & per\ x = 0 \\ 0 & per\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ed è tale che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

Il suo grafico è:

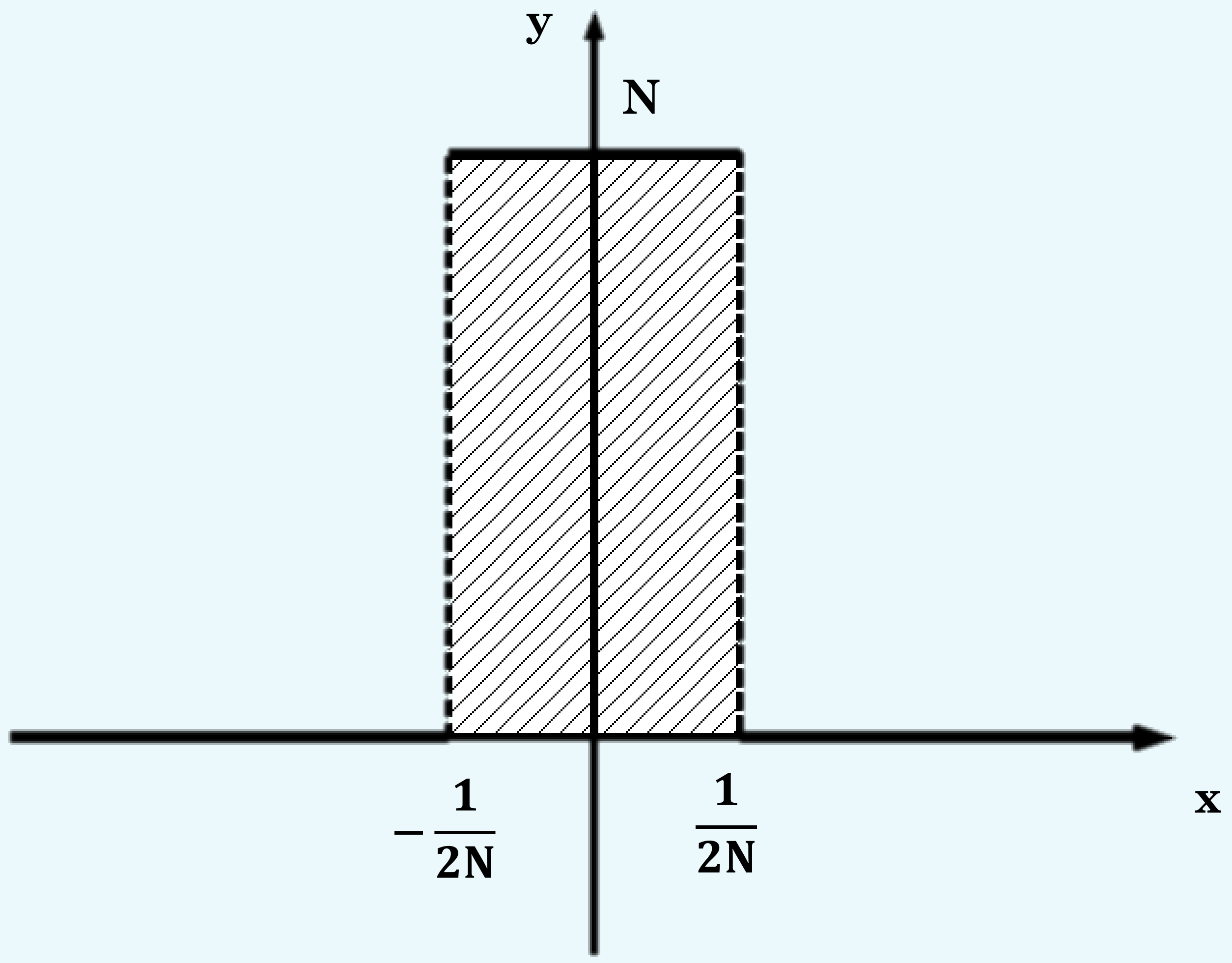


Si può definire anche come limite di una successione di funzioni.

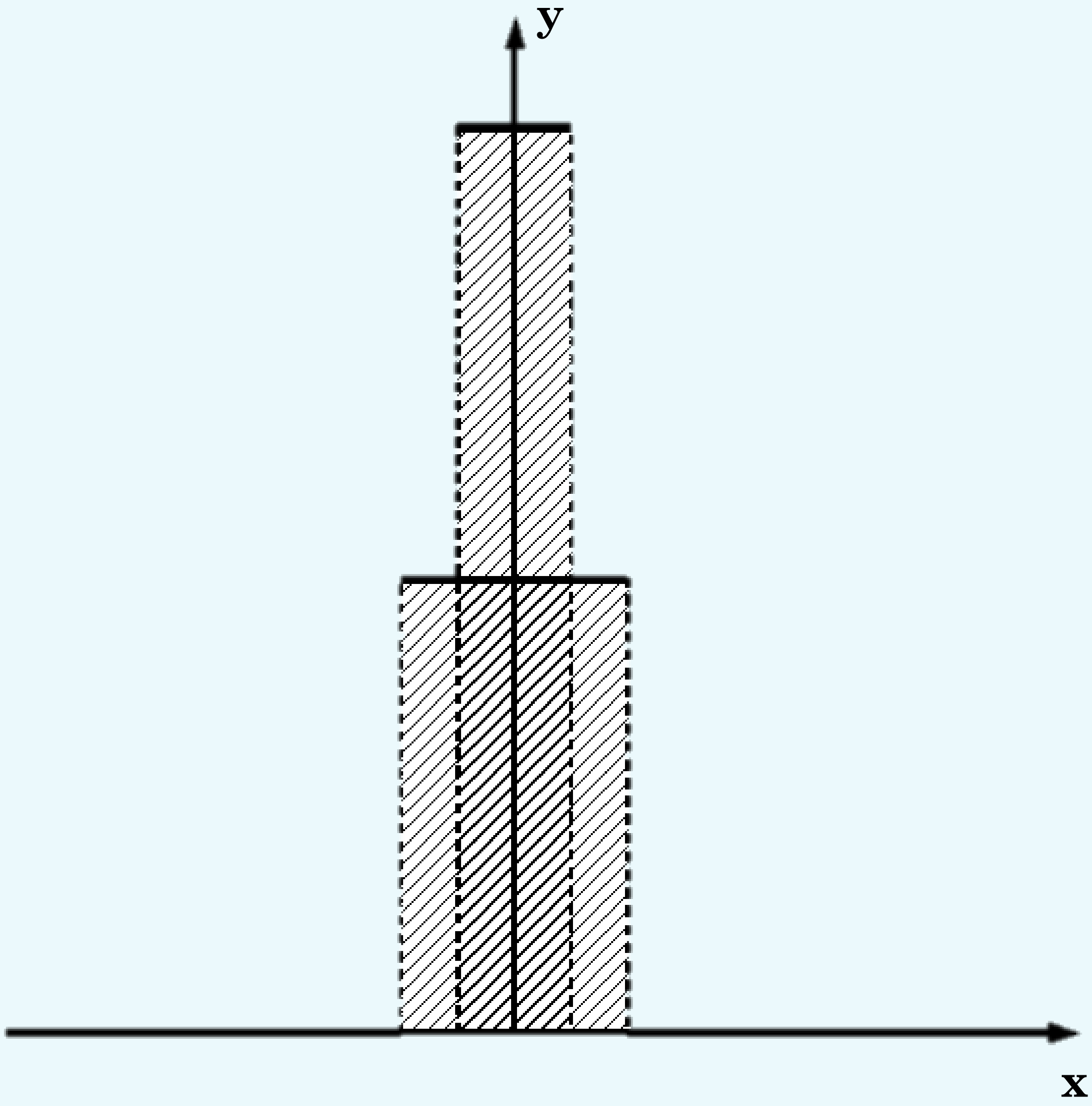
Ad esempio:

$$\delta_N(x) = \begin{cases} 0 & per\ \left(-\infty < x < -\frac{1}{2N}\right) \\ N & per\ \left(-\frac{1}{2N} < x < \frac{1}{2N}\right) \\ 0 & per\ \left(\frac{1}{2N} < x < +\infty\right) \end{cases}$$

Il grafico di queste funzioni è:



Al crescere di N



Perciò

$$\lim_{N \to +\infty} \delta_N(x) = \delta(x)$$

Per descrivere la delta possono essere utilizzate anche altre funzioni che assumono valori vicino a $x = 0$.

In generale è sufficiente che:

- $\delta_N(x) \geq 0 \; per \; \forall \; x \; \in \; \mathbb{R};$

E per qualunque coppia di interi positivi a e b:

- $\lim_{N \to +\infty} \int_a^b \delta_N(x) dx = 0;$

- $\lim_{N \to +\infty} \int_{-a}^{-b} \delta_N(x) dx = 0;$

- $\lim_{N \to +\infty} \int_{-a}^{b} \delta_N(x) dx = 1;$

Alcune proprietà

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)dx = \frac{1}{|a|}$ dove $a \neq 0$

Da cui ricaviamo $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$

Caso particolare: $a = -1$

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

La funzione delta è l’analogo continuo della funzione discreta delta di Kronecker, definita:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ i = j; \\ 0 & se\ i \neq j; \end{cases}$$

- Per la delta di Dirac vale:

se $f(x)$ è continua nell'intervallo (α, β) e

$\alpha < a < \beta$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\delta(x-a)dx = f(a)$$

Dove

$$\delta(x-a) = \begin{cases} +\infty & se\ x = a; \\ 0 & se\ x \neq a; \end{cases}$$

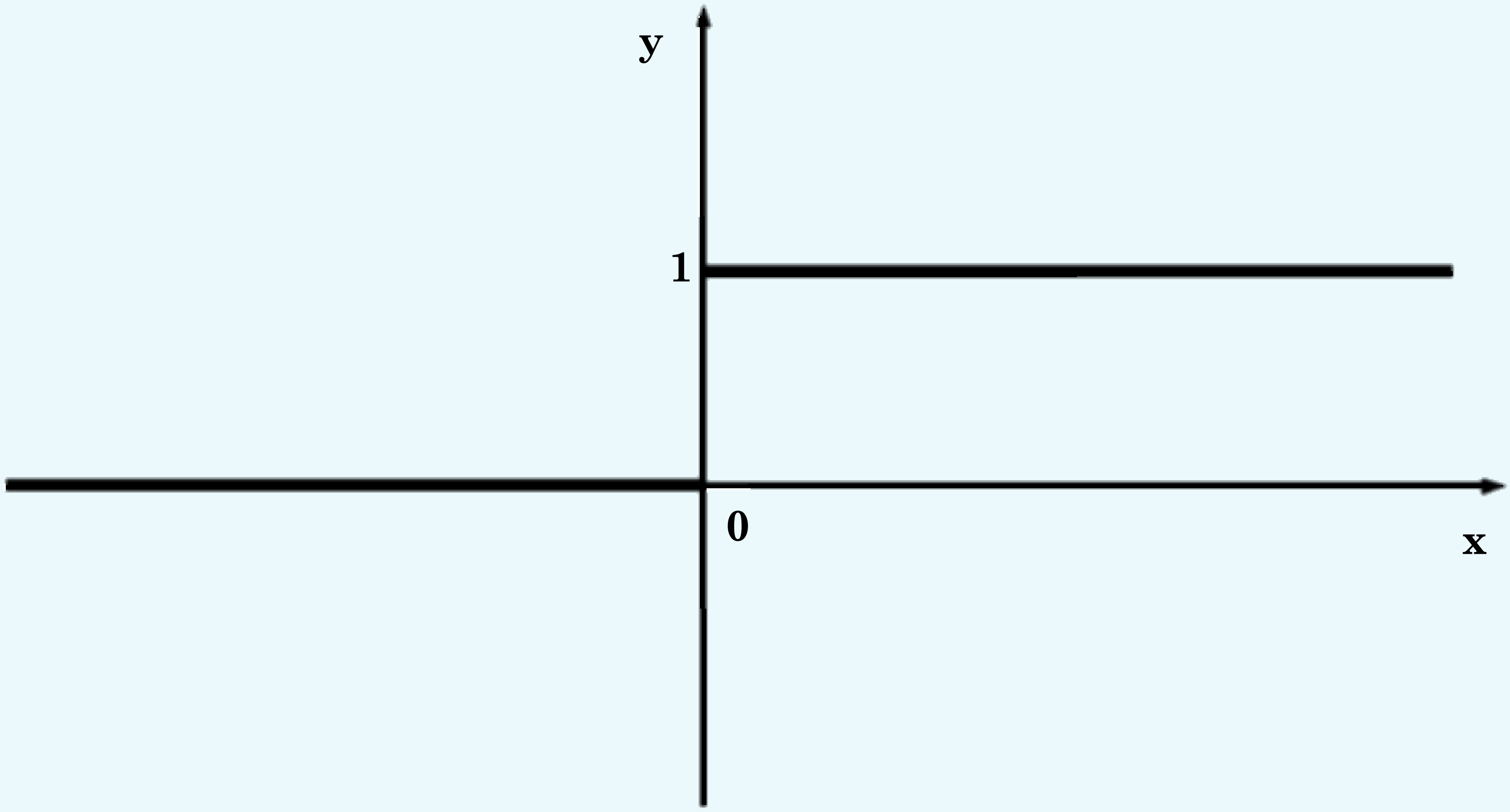
È la funzione delta traslata nel punto a.

- Calcoliamo l'integrale

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(t)dt = \begin{cases} 0 & se \ -\infty < x < 0; \\ 1 & se \ 0 < x < +\infty; \end{cases}$$

$H(x)$ è la funzione di Heaviside.

Il grafico:



Derivando la relazione precedente

$$H'(x) = \delta(x)$$

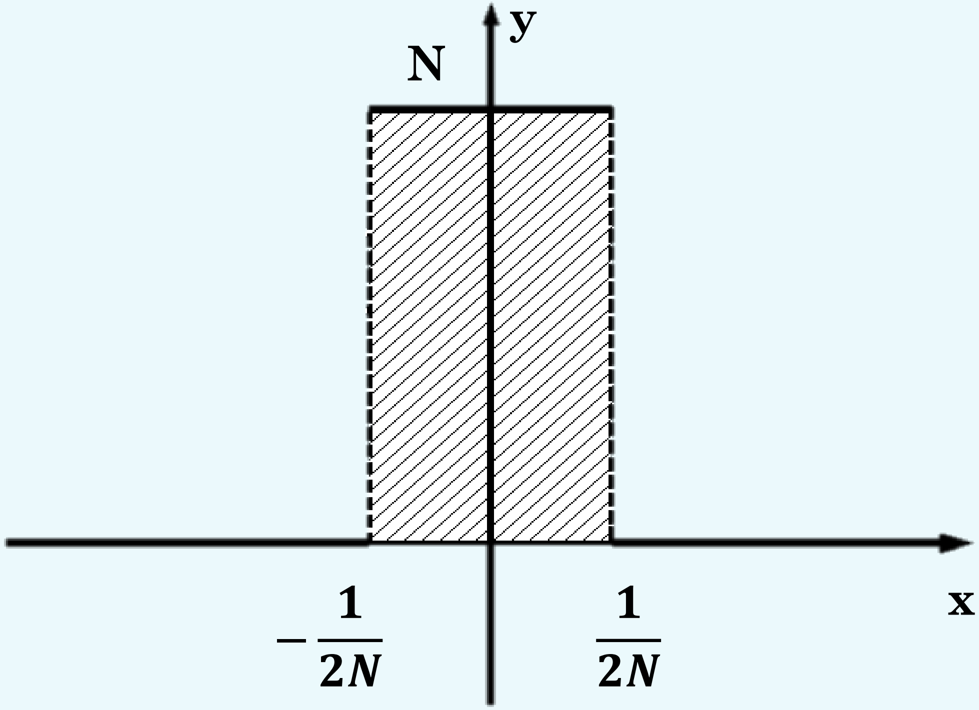
Si può ricavare la delta derivando una funzione discontinua.

La funzione delta può rappresentare la densità di una massa unitaria posta nell'origine degli assi.

Infatti consideriamo la massa distribuita uniformemente nell'intervallo

$$\left(-\frac{1}{2N}, \frac{1}{2N}\right)$$

La densità della massa sarà della forma:



Per $N \rightarrow +\infty$ la massa si concentra nell'origine e la densità coincide con la funzione delta.

La delta di Dirac trova applicazione nella costruzione della funzione di influenza, o funzione di Green, dal nome del matematico George Green che per primo ne sviluppò il concetto.

Siano:

$f(x)$ continua in (a, b), la funzione che descrive l'azione di una forza su un oggetto;

$\tilde{f}(x)$ la funzione che rappresenta il risultato dell'azione $f(x)$.

A l'operatore tale che:

$$A[f(x)] = \tilde{f}(x)$$

Supponiamo che valga il principio di sovrapposizione.

$$A[f_1 + f_2] = A[f_1] + A[f_2]$$

e per c costante

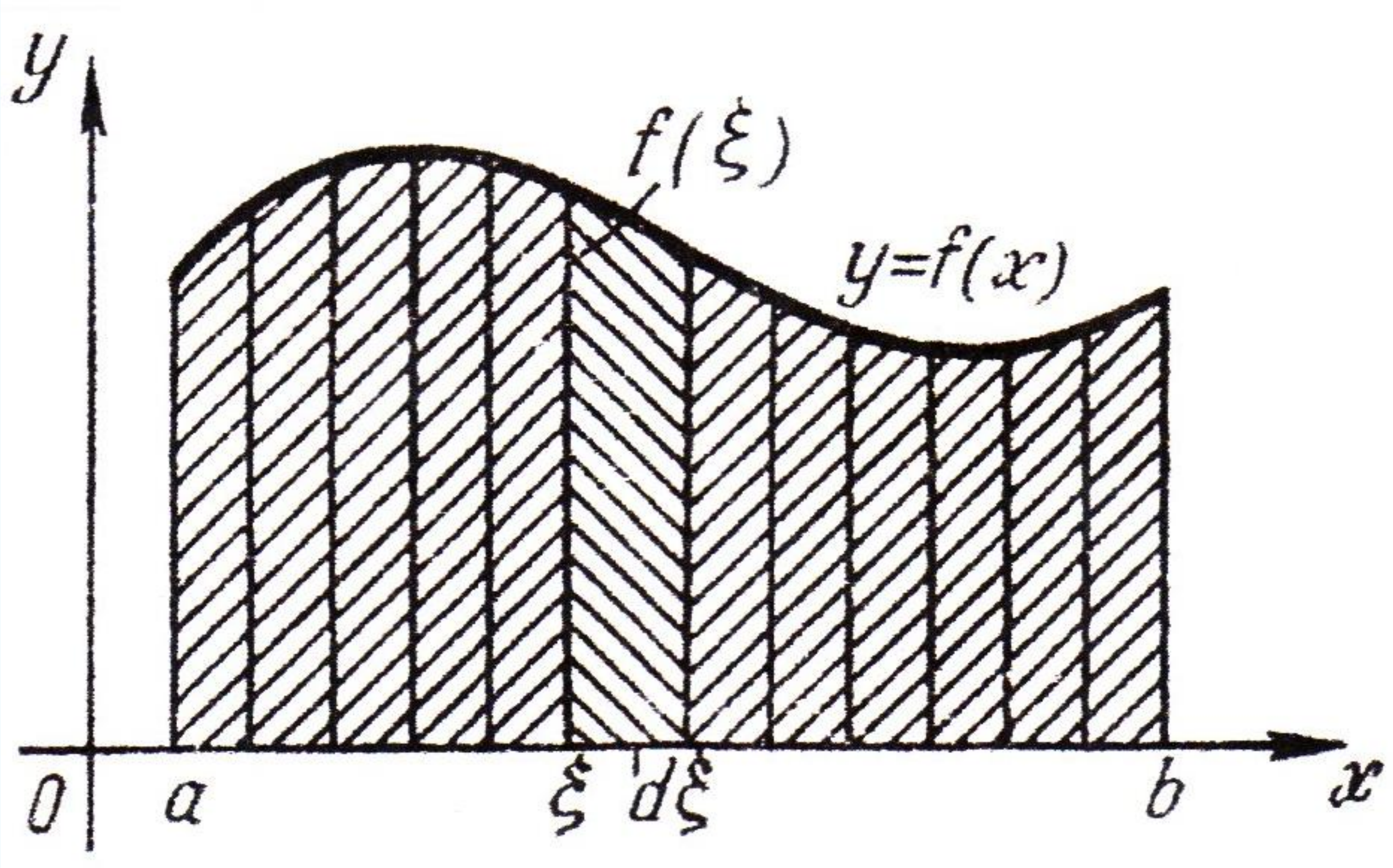
$$A[cf] = cA[f]$$

Cioè A è un operatore lineare.

Chiamiamo $G(x;\xi)$ il risultato nel punto x dell'azione esterna descritta dalla funzione $\delta(x-\xi)$ che agisce nel punto ξ fissato.

$$A[\delta(x-\xi)] = G(x;\xi)$$

Suddividiamo la funzione $f(x)$ in funzioni impulso



Questi impulsi sono uguali a

$$f(\xi)\, d\xi\, \delta(x-\xi)$$

Perciò

$$f(x) = \sum f(\xi) d\xi\, \delta(x-\xi)$$

Calcoliamo

$$A[f(x)] = A\left[\sum f(\xi)\ d\xi\ \delta(x-\xi)\right] =$$

$$= \sum A[f(\xi)\ d\xi\ \delta(x-\xi)] =$$

$$= \sum f(\xi)\ d\xi\ A[\delta(x-\xi)] =$$

$$= \sum f(\xi)\ d\xi\ G(x;\xi)$$

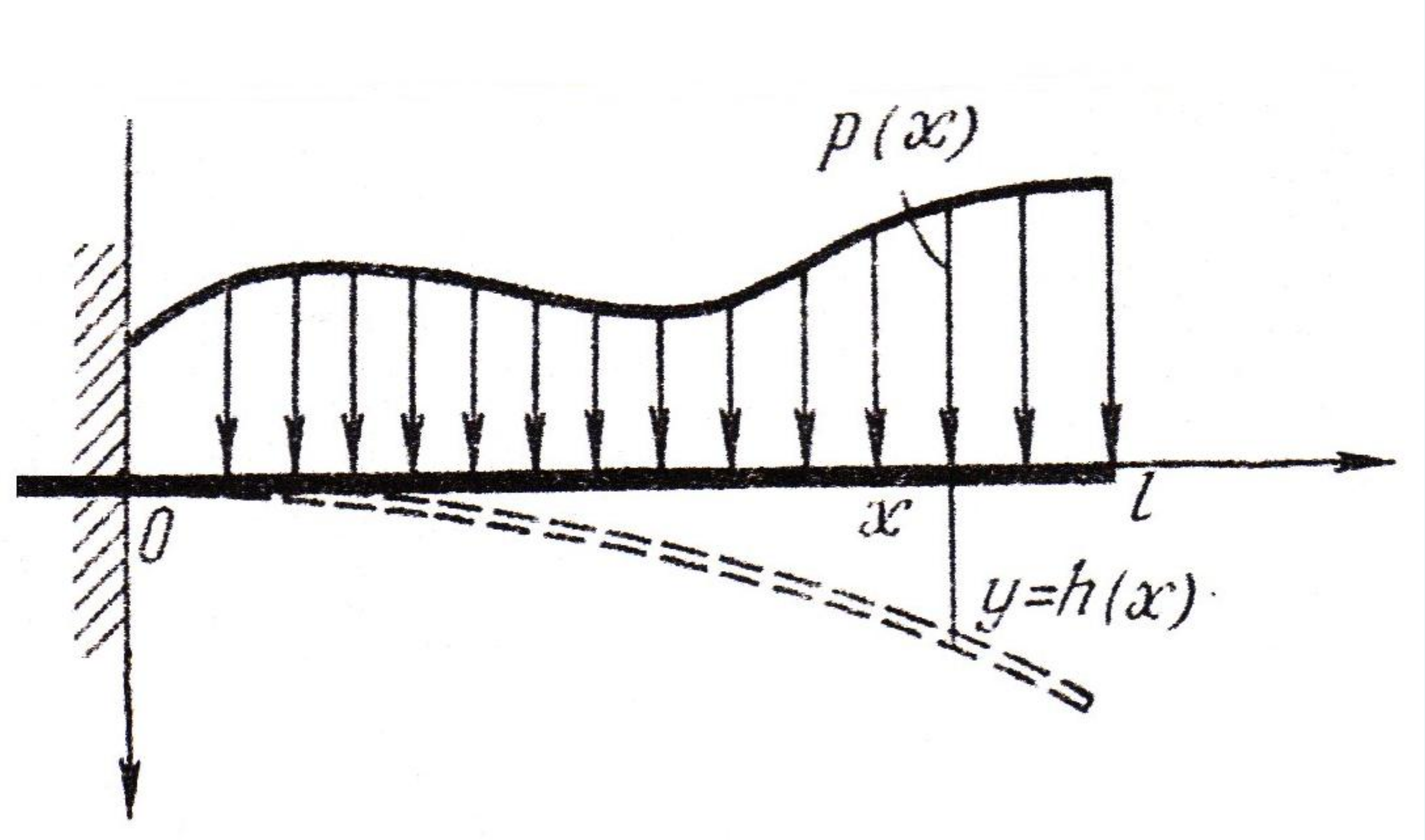
Se consideriamo gli intervalli $\mathrm{d}\xi$ infinitesimi

$$A[f(x)] = \int_a^b G(x;\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

Dove a e b sono gli estremi del tratto

in cui applichiamo la forza $f(x)$.

Consideriamo un esempio.



Vogliamo calcolare la flessione $h(x)$ di un'asta sottoposta all'azione della forza $p(x)$ applicata trasversalmente.

$p(x)$ è la forza esterna e $h(x)$ è la funzione di risposta.

Supponiamo che valga il principio di sovrapposizione.

$G(x;\xi)$ è la flessione nel punto x conseguente all'applicazione nel punto ξ di una sollecitazione unitaria descritta da $\delta(x-\xi)$.

La flessione totale dell'asta è

$$h(x) = \int_0^l G(x;\xi)\, p(\xi)\, d\xi$$

In generale la flessione può essere descritta da

$$EI\,\frac{d^4h(x)}{dx^4} = p(x)$$

Integrando l'equazione compare la funzione di Heaviside.

La flessione si ottiene alla quarta integrazione, ed è rappresentata da una funzione polinomiale a tratti.

GRAZIE PER L'ATTENZIONE!