Università degli studi di Cagliari
Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

La funzione ?(x) di Minkowski.

Relatore
Prof. Lucio Cadeddu

Candidato
Giuliana Boi

Anno Accademico 2013/2014

Indice:

Introduzione storica.

La funzione punto interrogativo ("Fragefunktion") fu definita per la prima volta nel 1904 dal matematico *Hermann Minkowski* e venne da egli denotata con ?(x). Minkowski nacque in Lituania nel 1864 da una famiglia di origine ebraica, ma intraprese i suoi studi in Germania frequentando l'Università di Berlino e l'Università di Köninsberg nella quale, ancora studente, fu insignito del Premio della matematica dalla *Académie des Sciences* francese, grazie alla realizzazione di un manoscritto riguardante lo studio delle forme quadratiche, al quale dedicò gran parte della sua carriera. Egli fu insegnante di Albert Einstein presso l'Università di Zurigo e nel 1902 entrò a far parte del Dipartimento di Gottinga, nel quale divenne stretto collaboratore di David Hilbert.

I suoi studi si soffermarono in particolar modo sull'aritmetica delle forme quadratiche, approfondendone le particolari proprietà nel caso di n variabili; fu proprio a partire dallo studio e dalla ricerca in quel campo che egli iniziò poi a concentrarsi sulle proprietà geometriche in uno spazio n-dimensionale.

Egli sviluppò la teoria geometrica dei numeri, con il merito di riuscire a risolvere molteplici questioni relative alla teoria dei numeri mediante procedimenti geometrici, dei quali si servì inoltre per elaborare una sua personale visione riguardo alla teoria della relatività speciale (introdotta da Einstein sulla base di risultati messi in luce la Lorentz e Poincarè), convincendosi che quest'ultima potesse essere meglio compresa nell'ambito di uno spazio non euclideo, da allora noto come *Spazio di Minkowski.*

In uno spazio di questo tipo, il tempo e lo spazio non sono unità separate, ma costituiscono un unico spazio-tempo quadridimensionale nel quale è possibile rappresentare in maniera opportuna la geometria di Lorentz, sulla quale poggia le sue fondamenta la teoria della relatività esposta da Einstein.

Minkowski morì all'età di 44 anni; resta famosa la frase che egli pronunciò durante il suo discorso in occasione dell'Assemblea degli Scienziati della Natura e dei Medici tedeschi il 21 settembre del 1908:

"I concetti di spazio e di tempo che desidero esporvi traggono origine dal terreno della fisica sperimentale, e in ciò risiede la loro forza. Sono radicali. D'ora in avanti lo spazio singolarmente inteso, ed il tempo singolarmente inteso, sono destinati a svanire in nient'altro che ombre, e solo una connessione dei due potrà preservare una realtà indipendente".

Capitolo 1

Definizioni ed interpretazioni di ?(x).

La funzione punto interrogativo di Minkowski è una funzione che possiede insolite *proprietà frattali* e la cui definizione mette in luce interessanti collegamenti e relazioni tra la rappresentazione dei numeri in *frazioni continue* e sotto forma di *espansione binaria*, abbracciando in tal modo molteplici ambiti della matematica.
La funzione ?(x) può essere definita in diversi modi, ciascuno dei quali ne evidenzia una particolare peculiarità che la caratterizza.

Possiamo anzitutto affermare che essa associa irrazionali quadratici a numeri razionali definiti nell'intervallo unitario, mediante un'espressione analitica che connette l'espansione in frazioni continue degli irrazionali quadratici all'espansione binaria dei razionali (secondo la definizione data da *Arnaud Denjoy*); inoltre, essa può essere definita in maniera ricorsiva come una funzione che associa numeri razionali a numeri razionali diadici.

1.1 La definizione costruttiva della funzione ?(x) .

Una particolare definizione della funzione ?(x), emerge da un articolo comunicato da H. Zassenhaus nel 1981 e pubblicato nel *Journal of number theory* del 1983, nel quale viene messa in luce la costruzione e la definizione originaria della funzione punto interrogativo data da Minkowski.

L'obiettivo dell'articolo citato è quello di descrivere il ragionamento mediante il quale Minkowski giunse a definire la funzione ?(x).

Seguendo la notazione adottata dal matematico *Lucas* nella "*Theorie des nombres*," denotiamo con il termine *serie di Stern-Brocot* il seguente sistema di frazioni razionali, assumendo per un attimo che $\frac{1}{0}$ e $\frac{0}{1}$ siano frazioni:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{0};$$
$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0};$$
$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{2}{1};$$
$$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{0}; \ldots$$

l' (m + 1)-esimo termine della serie è ottenuto dall' m-esimo termine attraverso l'inserimento di una frazione "mediana" della forma $\frac{a+c}{b+d}$ tra le due frazioni consecutive $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$.

Indicheremo con $u_m^{(n)}$ la (n+1)-esima frazione del (m + 1)-esimo termine della serie di Brocot e riportiamo di seguito un ulteriore esempio di Albero di Stern-Brocot per chiarirne la costruzione:

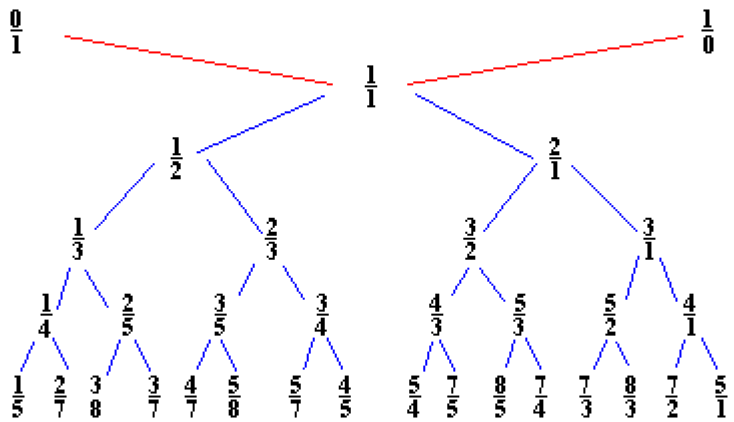


Illustrazione 1: Esempio di Albero di Stern-Brocot

A questo punto introduciamo la *costruzione geometrica* della funzione, ripercorrendo le tappe del ragionamento di Minkowski.

Costruzione geometrica.

Fissato un sistema di riferimento cartesiano, Minkowski considerò il segmento dal punto di coordinate (0,0) al punto (1,0) nell'asse delle x ed il segmento da (0,0) a (0,1) nell'asse delle ordinate. Inoltre, scelse di considerare le frazioni di Stern-Brocot $u_m^{(n)} \leq 1$ tali che $m \geq 1$.

Allora, per ogni m, tali frazioni vengono rappresentate sul segmento sopra citato nell'asse delle x, in modo da ottenere, per un dato m, i punti della forma seguente:

$$u_m^{(0)} = 0, \; u_m^{(1)} = \frac{1}{m}, \; \dots \; , u_m^{(2^{m-1})} = 1 \qquad (1)$$

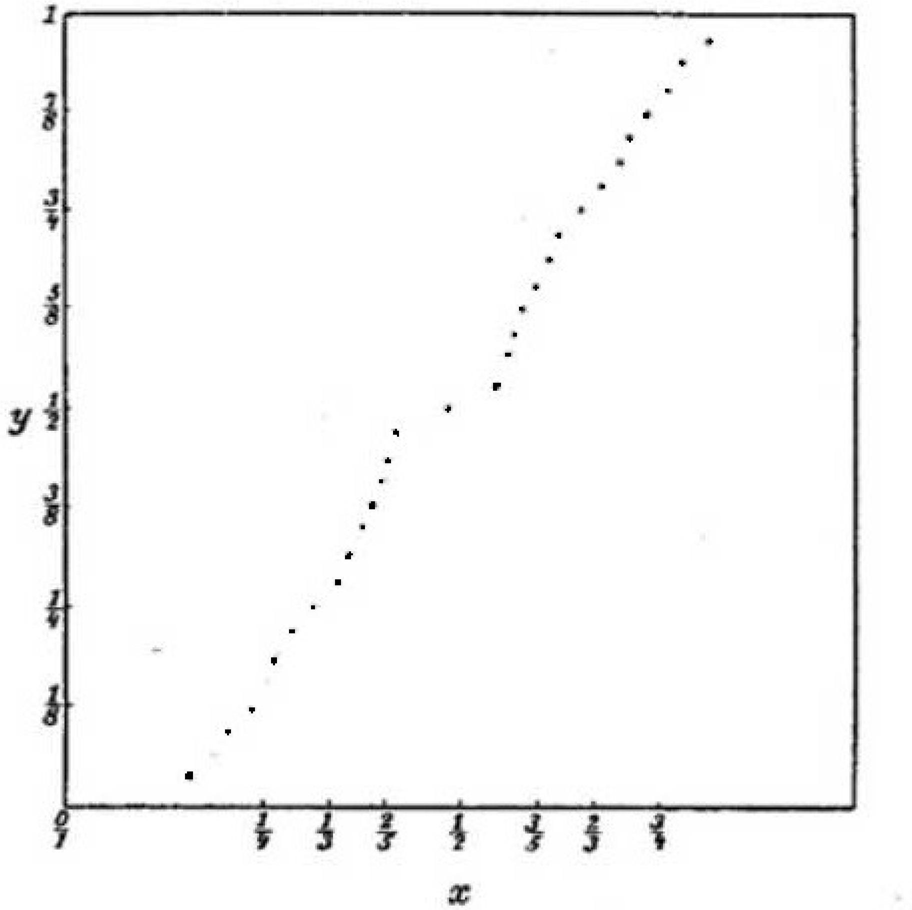
poiché ovviamente gli elementi $u_m^{(n)}$ che si trovano sul segmento considerato, per un dato m, sono esattamente $2^{m-1} + 1$.

Minkowski applicò una suddivisione analoga in corrispondenza dell'asse delle y, anch'esso contenente $2^{m-1} + 1$ punti della forma richiesta, vale a dire:

$$0, \; \frac{1}{2^{m-1}}, \; \frac{2}{2^{m-1}}, \dots, \; \frac{2^{m-1}}{2^{m-1}} = 1 \qquad (2)$$

ottenuti per successive bisezioni degli intervalli.

Riportiamo una rappresentazione grafica di quanto esposto precedentemente:



$$\frac{a}{b}\cdots\frac{a+a'}{b+b'}\cdots\frac{a'}{b'}$$

x irrazionale quadratico, y razionale e non diadico

y = ?(x): x razionale, y diadico

A partire dalle coordinate dei punti costruiti in *(1)* e *(2)*, egli ottenne il grafico della funzione punto interrogativo, che scelse di denotare con ?(x), ed introdusse la definizione della funzione nella forma seguente:

$$?\left(u_m^{(n)}\right) = \frac{n}{2^{m-1}}$$

Attraverso tale procedimento, Minkowski osservò che la definizione della funzione così esposta, richiedendo la condizione di continuità, poteva essere estesa a tutti i numeri reali appartenenti all'intervallo [0,1].

La definizione della funzione ?(x) venne inoltre riassunta da Hancock nell'opera “Development of the Minkowski Geometry of Numbers” e, negli anni successivi, essa venne studiata anche da altri matematici, quali Denjoy (il quale ne enunciò la definizione ricorsiva), Salem e Kinney.

1.2 Definizione analitica.

Introduciamo ora la seguente

Definizione analitica:

Se $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ è la rappresentazione in *frazione continua*[1] di un numero irrazionale x, allora:

$$?(x) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{a_1+\cdots+a_n}}\right)$$

mentre, se $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_m]$ è la rappresentazione in frazione continua di un numero razionale x, si ha:

$$?(x) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{a_1+\cdots+a_n}}\right)$$

1

1 Si rimanda il lettore alla sezione 1 dell'Appendice a pag. 30

1.3 Spiegazione intuitiva.

La definizione analitica della funzione ?(x) di Minkowski, può essere interpretata in maniera intuitiva a partire dalla considerazione di una stringa infinita di bit avente uno 0 come bit iniziale, riguardandola come rappresentazione di un numero reale definito nell'intervallo [0,1]. In tal modo, si ottengono le due diverse possibili interpretazioni seguenti:

i. Una prima interpretazione consiste nella lettura di una stringa di questo tipo come un'*espansione binaria*[2], posizionando un punto dopo il primo zero. In tal modo, supponendo di considerare una stringa del tipo

001001001001001001001001...

essa rappresenta sia il numero binario

0.01001001001001001001001... sia il numero reale $\frac{2}{7}$.

ii. Un'altra interpretazione è quella di vedere la stringa come una *frazione continua di un numero reale*, della forma $[0;\, a_1,\, a_2, \ldots]$. Riferendoci alla stringa utilizzata nell'esempio precedente, ad essa corrisponde la frazione continua [0; 2, 1, 2, 1,...], la quale, d'altra parte, costituisce la frazione continua del numero reale $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Nel caso in cui la stringa termini con un periodo di lunghezza infinita dello stesso bit, allora lo si ignora e si termina la rappresentazione, come suggerisce anche la seguente identità formale:

$$[0;\, a_1, \ldots,\, a_n,\, \infty] \;=\; [0;\, a_1, \ldots,\, a_n + \frac{1}{\infty}] \;=\; [0;\, a_1, \ldots,\, a_n + 0] \;=\; [0;\, a_1, \ldots,\, a_n]$$

2

2 Si rimanda il lettore alla sezione 2 dell'Appendice a pag.33

Possiamo pertanto affermare che la funzione punto interrogativo agisce sull'intervallo [0,1] associando alla stringa così come l'abbiamo interpretata nel punto i), la stringa interpretata come esposto nel punto ii).

Applicando quanto detto alla funzione ?(x), si ottiene la seguente uguaglianza:

$$?\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \frac{2}{7}$$

1.4 Dalla definizione ricorsiva di ?(x) al linguaggio C.

Nel caso particolare in cui scegliamo di considerare per la funzione di Minkowski argomenti razionali definiti nell'intervallo unitario, essa può essere definita in modo ricorsivo. Prima di descrivere il procedimento ricorsivo per la definizione di ?(x), premettiamo la seguente

Definizione (sequenza di Farey):

Per ogni numero naturale n, la sequenza di Farey F_n è una sequenza definita come l'insieme ordinato secondo l'ordine crescente di tutti i numeri razionali irriducibili espressi sotto forma di frazione continua con numeratore e denominatore compresi tra 0 ed n.

Ad esempio:

$$F_1 = \{\frac{0}{1}\,;\,\frac{1}{1}\}$$
$$F_2 = \{\frac{0}{1}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{1}\}$$
$$F_3 = \{\frac{0}{1}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{1}\}$$
$$F_4 = \{\frac{0}{1}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{3}{4}\,;\,\frac{1}{1}\}$$

Per descrivere la definizione ricorsiva di ?(x) consideriamo due frazioni ridotte $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ tali che sia soddisfatta la seguente relazione:

$$|ps - rq| = 1$$

ossia tali da essere due elementi adiacenti di una riga della sequenza di Farey.

Allora:

$$?\left(\frac{p+r}{q+s}\right) = \frac{1}{2}\left[?\left(\frac{p}{q}\right) + ?\left(\frac{r}{s}\right)\right]$$

Per i casi banali si ottiene:

$$?\left(\frac{0}{1}\right) = 0 \qquad\qquad ?\left(\frac{1}{1}\right) = 1$$

In tal modo, è possibile calcolare ?(x) per qualunque razionale x a partire dalla *sequenza di Farey* d'ordine 2,3, etc..

Inoltre, se $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ *e* $\frac{p_n}{q_n}$ sono due convergenti successive di una frazione continua, la matrice data da

$$\begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}$$

ha determinante ± 1.

Possiamo pertanto affermare che tale matrice è un elemento del gruppo delle matrici 2x2 con determinante ± 1.

1.4.1 Algoritmo.

La definizione ricorsiva data nel paragrafo precedente, si presta in modo naturale alla realizzazione di un algoritmo per il calcolo della funzione ?(x) per ogni numero reale.

L'idea di base dell'algoritmo, è strettamente legata all'*Albero di Stern-Brocot*: l'algoritmo ricerca in esso gli input x e riassume i termini dell'espansione binaria dell'immagine y = ?(x).

In particolare, fintanto che la condizione del ciclo data da

qr – ps = 1 resta soddisfatta, allora non è necessario ridurre la frazione $\frac{m}{n} = \frac{p+r}{q+s}$, in quanto essa risulta già ridotta.

Un altro invariante di ciclo è dato da $\frac{p}{q} \leq x \leq \frac{r}{s}$.

Possiamo inoltre osservare che il ciclo "for" in questo programma può essere analizzato allo stesso modo di un ciclo "while", mediante le dichiarazioni di interruzione condizionali presenti nelle prime tre righe.

Un terzo invariante (fino a precisione in virgola mobile) è rappresentato dalla condizione $y \leq ?(x) \leq y+d$ ma, poiché d risulta dimezzato prima del ciclo, la condizione di terminazione assume la forma $y \leq ?(x) \leq y+2\mathrm{d}$.

Per dimostrare la terminazione, è sufficiente verificare che aumenti la somma q + s di almeno 1 per ogni iterazione del ciclo, e che quest'ultimo terminerà nel momento in cui questa somma diventi troppo grande per essere rappresentata in C con un tipo di dato long.

Tuttavia, nella pratica, l'interruzione condizionale "y + d == y" è quella che assicura la cessazione del ciclo in un ragionevole lasso di tempo.

Riportiamo di seguito il frammento di codice relativo alla definizione della funzione ?(x) nel linguaggio di programmazione C:

```c
/* Funzione punto interrogativo di Minkowski */
double minkowski(double x) {
long p=x;
 if ((double)p>x)
   --p;
 long q=1, r=p+1, s=1, m, n;
 double d=1, y=p;
    if (x<(double)p||(p<0)^(r<=0))
      return x;
for (;;)
{
    d/=2;
        if (y+d==y)
        break;
         m=p+r;
            if ((m<0)^(p<0))
            break;
            n=q+s;
                if (n<0)
                 break;

                  if (x<(double)m/n)
                  r=m, s=n;
                  else
                  y+=d, p=m, q=n;
      }
      return y+d; }
```

Capitolo 2

Caratteristiche della funzione ?(x).

2.1 Autosimilarità.

La funzione punto interrogativo è auto-simile. Un *monoide di auto-similarità* può essere generato da due operatori S ed R agendo sul quadrato unitario; tale monoide è definito come segue:

$$S(x,y) = \left(\frac{x}{x+1}, \frac{y}{2}\right)$$
$$R(x,y) = (1-x, 1-y)$$

Osserviamo che S riduce il quadrato unitario al quadrato di area 1/4 in basso a sinistra, mentre R esegue una riflessione rispetto al suo centro. Un punto sul grafico di ?(x) avrà coordinate (x, ?(x)), per alcuni x nell'intervallo [0,1].

Tale punto si trasforma da S in R in un altro punto del grafico, in quanto la funzione punto interrogativo soddisfa le seguenti identità $\forall x \in [0,1]$:

$$?\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{?(x)}{2}$$
$$?(1-x) = 1-?(x)$$

2.1.1 Frattali e curve di de Rham.

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto che la funzione punto interrogativo di Minkowski possiede diverse proprietà frattali ed in particolare si è osservato che tale funzione risulta essere un caso particolare di una famiglia di curve frattali caratteristica, le curve di de Rham. Diamo ora alcuni cenni indicativi al riguardo.

Un *frattale* è definito come un oggetto geometrico dotato di omotetia interna: intuitivamente, la sua principale proprietà consiste nel ripetersi nella sua forma allo stesso modo su scale diverse. In tal modo, ingrandendo una qualunque sua parte, si ottiene una figura simile all'originale. Il termine frattale, introdotto per la prima volta da Benoit Mandelbrot, deriva dal termine latino "fractus", che significa rotto, spezzato; ciò mostra sin da subito la peculiarità matematica delle immagini frattali di avere anche dimensione non intera, ossia rappresentata da un numero razionale. In natura si incontrano i più svariati esempi di frattali, quali i cristalli di ghiaccio, alcuni tipi di piante e fiori etc.

Un'altra interessante proprietà che caratterizza i frattali e che li distingue dagli oggetti geometrici euclidei, riguarda essenzialmente il metodo di costruzione. Infatti, mentre una curva piana si costruisce nel piano cartesiano a partire da una funzione del tipo $f(x(t), y(t)) = 0$, che rappresenta la posizione del punto sulla curva al variare del tempo, la costruzione di una curva frattale si basa su un algoritmo, la cui principale proprietà è quella di dover essere iterato più volte. Dal punto di vista teorico, l'algoritmo che conduce alla curva frattale che si desidera rappresentare è costituito da infiniti passi ma, nelle applicazioni pratiche, ci si ferma dopo un numero congruo di iterazioni fino ad ottenere una curva approssimativamente uguale a quella di partenza.

Ciò rappresenta la proprietà che sta alla base della costruzione di un frattale, ossia l'*autosimilarità*, la quale discende a sua volta da una particolare trasformazione geometrica (detta omotetia), mediante la quale in seguito ad ingrandimenti successivi di ogni parte del frattale si ottiene sempre una figura simile a quella originale.

Riportiamo di seguito alcune immagini di frattali:

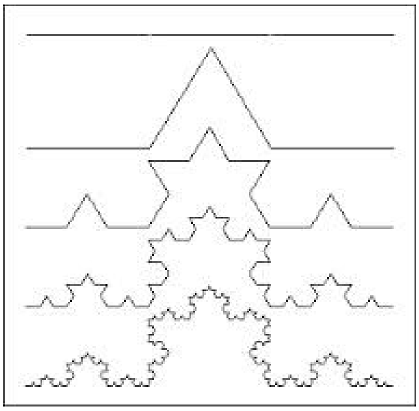


Illustrazione 2: Curva fiocco di neve

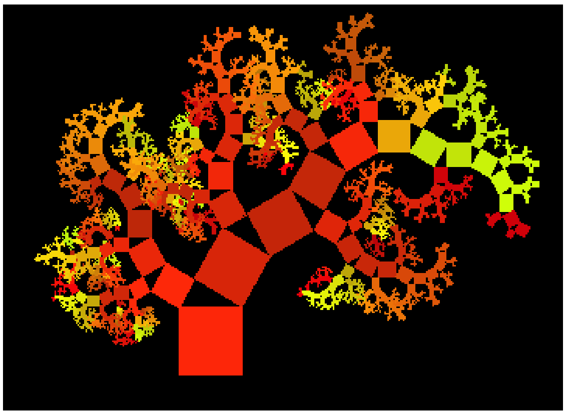


Illustrazione 3: Albero frattale

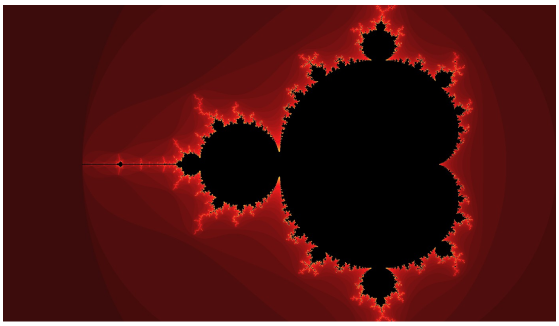


Illustrazione 4: Frattale di Mandelbrot

Dopo aver chiarito gli aspetti salienti che riguardano la definizione di un frattale, introduciamo alcune caratteristiche di una classe particolare di tali curve, alla quale appartiene la nostra funzione punto interrogativo: si tratta della famiglia delle *curve di de Rham*.

Per definire tali curve consideriamo uno spazio metrico (M,d) (generalmente si considera R^2 con l'usuale metrica euclidea), ed una coppia di applicazioni (contrazioni) definite su M come segue:

$$d_0 : M \rightarrow M$$

$$d_1 : M \rightarrow M$$

Per il Teorema del punto fisso di Banach, tali applicazioni possiedono rispettivamente i punti fissi p_0 e p_1 . Sia ora x un numero reale definito nell'intervallo [0,1] ed avente espansione binaria della forma

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}$$

dove ogni b_k vale 0 o 1, e si consideri l'applicazione $c_x : M \rightarrow M$ definita da $c_x = d_{b_1} \circ d_{b_2} \circ \cdots \circ d_{b_k} \circ \cdots$

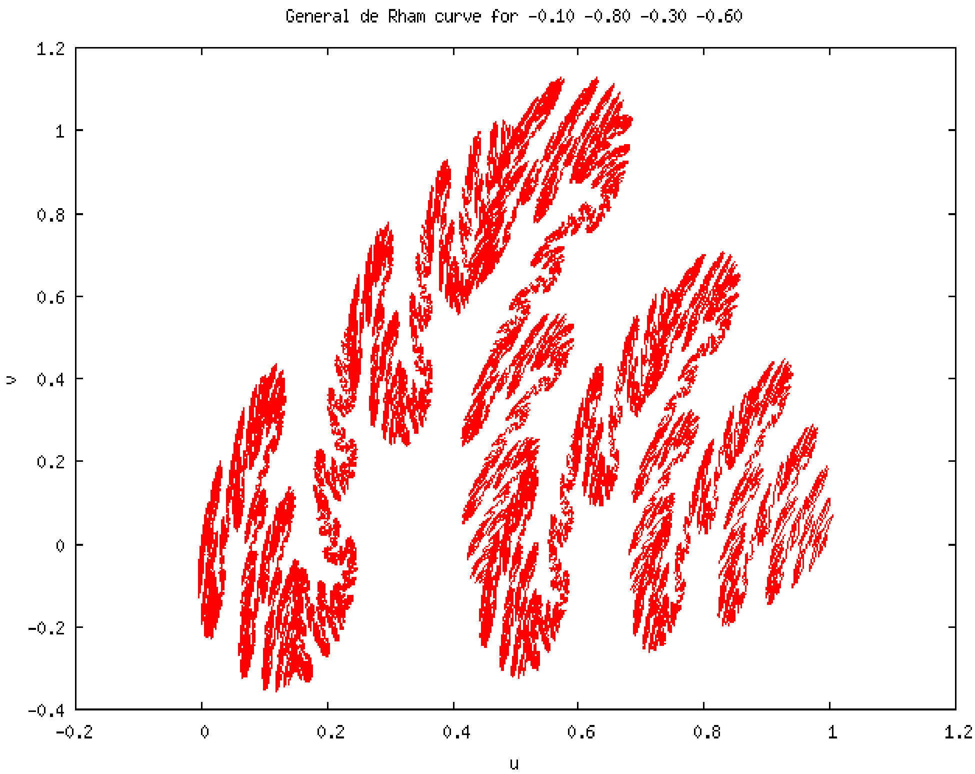
Si dice curva di de Rham l'insieme dei punti p_x ottenuti associando al bacino d'attrazione di d_0 e d_1 un unico punto in M mediante l'applicazione c_x .

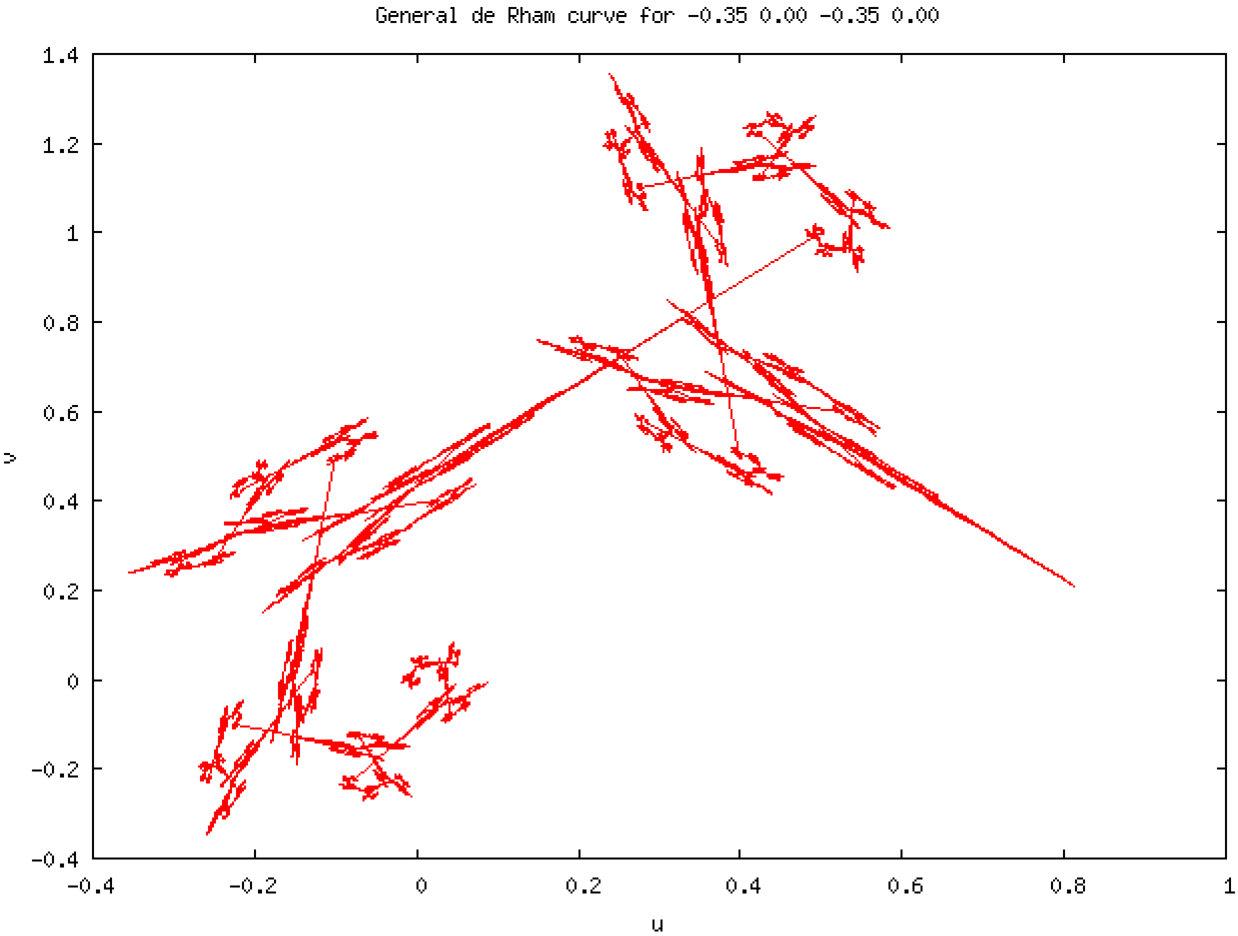
Ogni curva curva di de Rham è per costruzione autosimile.

La funzione ?(x) appartiene a tale classe di curve e, in particolare, è generata dalla seguente coppia di applicazioni:

$$d_0(z) = \frac{z}{z+1} \quad , \quad d_1(z) = \frac{1}{z+1} \quad .$$

Riportiamo alcuni grafici di generiche curve di de Rham:




General de Rham curve for -0.35 0.00 -0.35 0.00
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
v
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
u

2.2 Proprietà della funzione ?(x).

La funzione ?(x) è *strettamente crescente* e *continua*, ma non assolutamente continua. La sua derivata si annulla in corrispondenza dei punti razionali.

Essa è una *funzione dispari* e soddisfa la seguente equazione funzionale:

$$?(x + 1) = ?(x) + 1$$

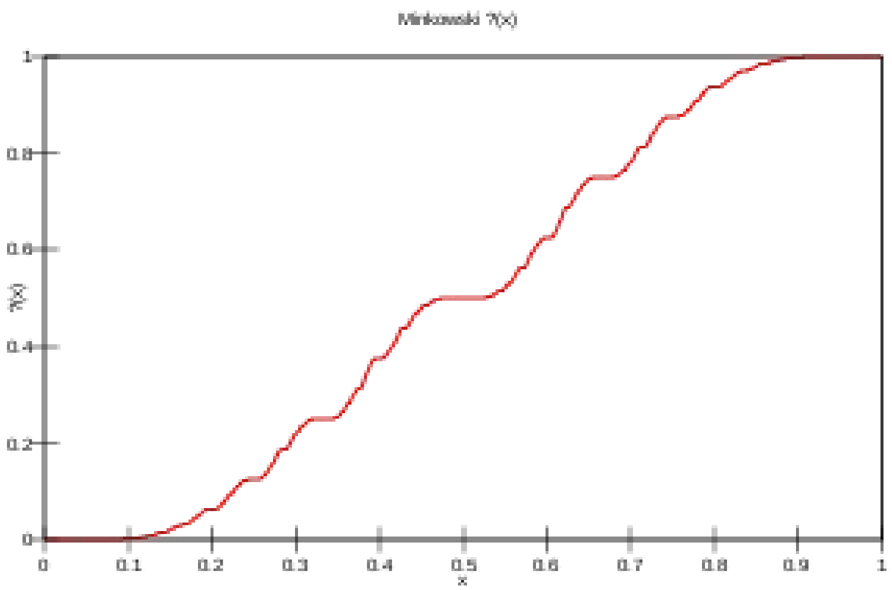
Di conseguenza, la funzione che associa ad x l'immagine ?(x) – x , è una particolare funzione periodica di periodo 1, della quale riportiamo il grafico nella pagina successiva.

Il grafico della funzione ?(x), riportato anch'esso nella pagina seguente, costituisce un caso particolare di curve di de Rham.

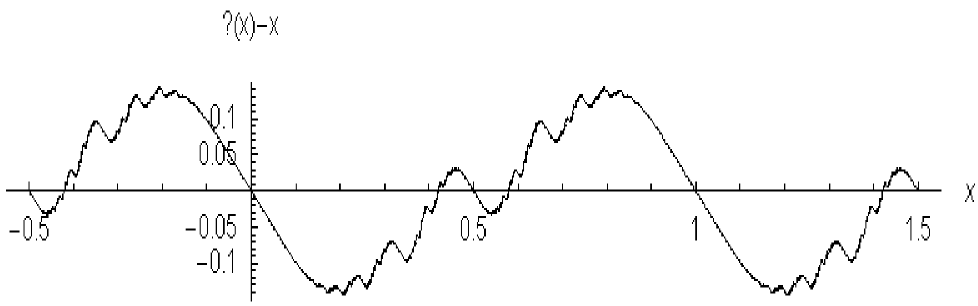
La funzione punto interrogativo gode inoltre di un'altra interessante proprietà che si ricollega al concetto di frattali; infatti, è possibile ottenere diverse costruzioni di misure che, integrate, danno come risultato proprio la funzione ?(x).

In particolare, una di tali costruzioni si ottiene misurando la densità dei numeri di Farey nella retta reale. La misura punto interrogativo che si ottiene costituisce un tipico esempio di misura multi-frattale.

Grafici:



Minkowski ?(x)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
?(x)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x



?(x)−x
0.1
0.05
−0.05
−0.1
−0.5
0.5
1
1.5
x

2.2.1 *Sulla differenziabilità della funzione ?(x).*

Come abbiamo già affermato nel precedente paragrafo, la funzione ?(x) è derivabile; a tal riguardo è interessante soffermarsi su alcune condizioni necessarie e sufficienti di derivabilità di tale funzione, riportate in numerosi e recenti articoli pubblicati nel *Journal of Mathematical Analysis and Applications.*

In uno di essi, ricevuto il 15 Aprile del 2009, vengono enunciati interessanti lemmi e teoremi (nati dalla ricerca di diversi matematici) relativi allo studio della derivata prima della funzione punto interrogativo di Minkowski ed ai casi particolari in cui essa risulta essere uguale a zero o a infinito. Enunciamo di seguito due di tali risultati, i quali mostrano le particolari condizioni affinchè ?'(x) = 0 e ?'(x) = ∞ .

Tali condizioni, necessarie e sufficienti, sono formulate in termini di somme dei quozienti parziali dell'espansione in frazione continua per un dato

x = $[0;\ a_1, \ldots,\ a_t]$, ossia:

$$S_x(t) = a_1 + \cdots + a_t$$

In particolare, si dimostra che:

i) Se esiste una costante C tale che $S_x(t) \leq k_1 t + \frac{\log t}{\log 2} + C$

dove $k_1 = 2 \log \frac{1 + \sqrt{5}}{\log 2} = 1.388$, allora ?'(x) esiste e si ottiene ?'(x) = ∞.

Un altro risultato è il seguente:

ii) Assumiamo che esista una costante C tale che $S_x(t) \geq k_2 t - C$,

dove $k_2 = \dfrac{4 \log \dfrac{5+\sqrt{29}}{2} - 5 \log\left(2+\sqrt{5}\right)}{\log \dfrac{5+\sqrt{29}}{2} - \log\left(2+\sqrt{5}\right) - \log \sqrt{2}} = 4.401$,

allora ?'(x) esiste ed è nulla.

Si dimostra inoltre che la scelta delle costanti k_1 e k_2 nelle condizioni su $S_x(t)$ è ottimale.

Appendice.

1 Cenni sulle frazioni continue

Visto lo stretto collegamento tra la funzione punto interrogativo di Minkowski e le frazioni continue, è utile chiarire significato e proprietà di queste ultime.

Una frazione continua di un dato numero x è un'espressione della forma seguente:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

dove a_0 è un intero e tutti gli altri a_n sono interi positivi detti quozienti parziali.
Osserviamo che la scrittura estesa della frazioni continue è poco pratica; pertanto, per ovviare a tale inconveniente, vengono utilizzate diverse notazioni che consentono di abbreviarla.
Se i termini della frazione sono a_0, a_1, a_2 e a_3, la frazione continua viene denotata nel modo seguente:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3]$$

Il concetto di frazione continua nasce dall'esigenza di ottenere una rappresentazione "matematicamente pura" dei numeri reali.
La più nota tra le rappresentazioni, come sappiamo, è l'espansione decimale.

Si dice che la sequenza di interi $\{a_i\}$ rappresenta il numero reale r se:

$$r = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 10^{-i}$$

dove ogni a_i è un elemento di {0,1,2,...,9}.

Osserviamo che tale rappresentazione soffre di alcuni limiti; uno di essi è la presenza della costante 10 nella precedente formula, in quanto la scelta della base cui fare riferimento, è puramente arbitraria.

Un altro problema riguarda l'impossibilità di rappresentare alcuni numeri reali in modo finito, come accade ad esempio nel caso del numero 1/3 che è rappresentato dalla sequenza infinita (0,3,3,3,3,...).
Le frazioni continue sono in grado di risolvere il primo problema e di semplificare notevolmente il secondo.

1.1 Calcolo della frazione continua di un numero reale.

Il calcolo della frazione continua di un numero reale consiste nella ripetizione di due operazioni: considerare anzitutto la parte intera del numero del quale si vuole ottenere la frazione continua e poi prendere il reciproco della sua parte frazionaria.
Supponendo di considerare un dato numero reale r, dette i ed f la sua parte intera intera e la sua parte frazionaria rispettivamente, si ottiene la seguente relazione: $r = i + f = i + \cfrac{1}{\cfrac{1}{f}}$

La quantità 1/f è un numero maggiore di 1, pertanto si può considerare la sua parte intera e procedere al calcolo degli altri coefficienti; é ovvio constatare che l'algoritmo si arresta nel momento in cui f si annulla: ciò avviene se e solo se r è razionale.

Esempio di calcolo: ricerca della frazione continua di 3,245

Rappresentiamo i risultati ottenuti in ciascun passo nella seguente tabella:

i	r-i	f	1/f
3	3,245 - 3	= 0,245	1/0,245 = 4,082
4	4,082 - 4	= 0,082	1/0,082 = 12,250
12	12,250 - 12	= 0,250	1/0,250 = 4,000
4	4	= 0	Fine

La frazione continua di 3,245 è [3; 4, 12, 4] ossia, con la notazione estesa:

$$3,245 = 3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{4}}}$$

2 L'espansione binaria di un numero razionale.

E' possibile esprimere ciascun numero razionale in forma binaria attraverso un numero finito di cifre o periodicità.

Riportiamo il procedimento generale per ottenere l'espansione binaria di un razionale x dato.

1) Si determina anzitutto l'espressione in binario della parte intera del numero considerato; la conversione da decimale in binario consiste nell'esecuzione di ripetute divisioni per due del numero considerato e via via dei quozienti ottenuti, arrestandosi nel momento in cui il quoziente ottenuto è nullo. L'equivalente in binario del numero considerato è dato dalla successione dei resti ottenuti nel corso di tale algoritmo di divisione, dall'ultimo al primo.

2) In seguito, occorre considerare la parte frazionaria del numero (che denoteremo con x), raddoppiarla e poi ragionare come segue:

- Se $x < 1$, si aggiunge uno 0 all'espansione binaria;

- Se $x > 1$, si aggiunge un 1;

Si procede in questo modo fino a quando $x = 0$ (ed in tal caso l'espansione si ferma) oppure quando x eguaglia un precedente x già ottenuto

Vediamo un esempio di applicazione di quanto detto:

Esempio: calcolo dell'espansione binaria di 5.5625

Procediamo alla conversione in binario della parte intera del numero; si ottiene

5 = 101

A questo punto, raddoppiamo la parte frazionaria:

0,5625 * 2 = 1,125

Poichè il risultato ottenuto è maggiore di 1, aggiungiamo un 1 all'espansione binaria, ed iteriamo lo stesso procedimento sino a quanto la parte frazionaria si annulla. Il risultato finale è 101.1001

Bibliografia

1. E. LUCAS, “Theorie des nombres,” p. 469, Paris, 1891.

2. H. MINKOWSKI, “Zur Geometrie der Zahlen,” pp. 164-173, Verhandlung des III. Inter- nationalen Mathematiker-Kongresses, Heidelberg, 1904; Gesammelte Abhandlungen, Bd. II, pp. 43-52.

3. H. HANCOCK, “Development of the Minkowski Geometry of Numbers,” p. 754, Macmillan Co., New York, 1939.

4. A. DENJOY, Sur une fonction reelle de Minkowski, J. Math. Pures Appl. (9) 17 (1938), 105.

5. BIBILONI, L.; PARADIS, J.; VIADER, P. (2001),"The derivative of Minkowski's singular function",*Journal of Mathematical Analysis and Applications*

6. H. MINKOWSKI, *Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-*

Kongresses in Heidelberg, (1904) Berlin

7. ANNA A. DUSHISTOVA, IGOR D. KAN, NIKOLAY G. MOSHCHEVITIN, Journal of Mathematical Analysis and Applications: “Differentiability of the Minkowski question mark function”, (Department of Number Theory, Fac. Mathematics and Mechanics, Moscow Lomonosov State University, Moscow, 119991, Russia).