Analisi Matematica 1

Corso di Studi: Triennale in Matematica – Triennale in Fisica (mutuato)

A.A. 2014/15

Docente: Lucio Cadeddu

Anno di corso: 1°
Semestre: 1°

Sede lezioni: AULA Alfa – Cittadella Universitaria di Monserrato
CFU: 12 (=96 ore frontali)

Prerequisiti: nozioni di base della teoria degli insiemi e principali proprietà degli insiemi numerici fondamentali. Calcolo algebrico e simbolico elementare. Equazioni e disequazioni di primo e secondo grado. Sistemi di equazioni e disequazioni. Trigonometria. Nozioni di base di geometria analitica (rette e curve nel piano cartesiano).

Obiettivi formativi: apprendimento dei concetti base dell'Analisi Matematica: funzioni di una variabile reale, continuità, derivabilità, studio del grafico, studio dei limiti, sviluppo di Taylor. Successioni e serie numeriche. Integrale di Riemann e metodi di calcolo di aree.

Programma. Contenuti del Corso (cd significa “con dimostrazione”, sd “senza dimostrazione”)

1. Richiami sugli insiemi numerici: naturali, interi, razionali (costruzione tramite insieme quoziente), reali (cenno alla costruzione tramite assioma di completezza) e complessi. Irrazionalità della diagonale del quadrato unitario (cd). Il piano complesso, forma algebrica, trigonometrica ed esponenziale di un numero complesso. Proprietà degli insiemi di numeri reali: massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore.

2. Topologia della retta: punti interni, esterni, di frontiera, isolati, di accumulazione, definizioni ed esempi. Insiemi aperti, chiusi, limitati, definizioni ed esempi. Proprietà degli aperti e chiusi (teor. 2.1, 2.2 e 2.3 (cd)). Teorema di Bolzano Weierstrass (sd). La retta ampliata. Insiemi compatti, teorema di Heine-Borel (sd), insiemi connessi.

3. Funzioni tra insiemi: iniettive, suriettive, composte, inverse. Definizioni ed esempi (pg. 24-29, 32-35). Il principio di induzione. Applicazioni del

metodo di induzione (somma dei primi N numeri, disuguaglianza di Bernoulli (cd)).
4. Funzioni di variabile reale: positività e simmetrie, funzione parte positiva e negativa di f, valore assoluto, funzioni pari e dispari. Funzioni limitate. Massimi e minimi locali e globali. Funzioni monotone. Esempi. Le funzioni elementari (sin(x), cos(x), log(x), ex, etc.).

5. Successioni e serie: limite di una successione, progressione geometrica, teorema dei due carabinieri, limiti notevoli (incluso numero di Nepero “e” (cd)), massimo e minimo limite.

Successioni e topologia, fondamentale → limitata (cd), criterio di Cauchy (cd).

Serie numeriche, serie geometriche e telescopiche, serie a termini positivi, condizione necessaria (cd), criterio del confronto, criterio del rapporto e della radice (tutti cd), criterio di Cauchy (sd), serie armonica generalizzata, convergenza (assoluta, semplice) (cd), serie alternate, criterio di Leibnitz (sd).

6. Limiti per funzioni. Prime proprietà: unicità del limite (cd), limiti destro e sinistro, per eccesso e per difetto. Definizioni di limite al finito e all'infinito. Teorema della permanenza del segno (cd). Teorema dei due carabinieri (o di confronto) (cd). Unicità del limite (cd). Limiti notevoli (caso sin(x)/x)(cd). Operazioni con limiti (cd). Caso di non esistenza del limite. Forme indeterminate. Limite di funzione composta (sd). Esistenza del limite per funzioni monotone (sd). Limiti di potenze, esponenziali, logaritmi. Funzioni iperboliche, definizioni e grafici. Limiti notevoli (tutti cd).

7. Infinitesimi ed infiniti. Criteri di trascurabilità (cd). Simboli di Landau. Asintoti.

8. Funzioni continue. Continuità da destra e da sinistra. Continuità della funzione composta (sd). Discontinuità eliminabili, di prima e seconda specie. Discontinuità delle funzioni monotone (cd). Esempi. Teoremi notevoli per funzioni continue: permanenza del segno, degli zeri, dei valori intermedi, di Darboux, di Weierstrass (per massimi e minimi di funzioni continue in un compatto) (tutti cd). Continuità uniforme. Teorema di Heine-Cantor (sd).

9. Derivata di una funzione. Definizione di derivata prima e suo significato geometrico e fisico. Derivata destra e sinistra. Punti di non derivabilità (a tg verticale, angolosi, cuspidi).

Operazioni con le derivate (cd). Derivazione di funzioni composte e inverse (cd). Derivate di funzioni elementari. Derivate di ordine superiore. Differenziale.

10. Applicazione delle derivate. Massimi e minimi relativi (locali) per funzioni derivabili. Teorema di Fermat, di Rolle, di Lagrange e Cauchy (tutti cd). Derivata e funzioni monotone (crescenza e decrescenza). Test di monotonia (cd). Teoremi (regole) di De L'Hopital (cd).

11. Schema per lo studio del grafico di una funzione derivabile. La formula di Taylor (cd). Proprietà dell'operatore di Taylor (cd). Resto nella forma di Peano (cd) e di Lagrange (sd).

Esempi. Applicazioni. Teorema sulle derivate successive (cd). Concavità, convessità e flessi.

12. Integrali. Integrale di Riemann, caratterizzazione dell'integrale, teor. 1.3 (sd). Classi di funzioni integrabili: continue su compatti (cd) e monotone e limitate (cd); teorema fondamentale del calcolo integrale e corollario (entrambi cd), teorema della media integrale (cd). Proprietà dell'integrale di Riemann. Integrale definito e indefinito. Primitive notevoli, regole di integrazione, integrazione per parti (cd), metodi di sostituzione.

Integrali impropri, criteri di convergenza (confronto, assoluta convergenza (tutti sd).

Testi di riferimento *(testi adottati e testi di consultazione)*
Teoria: C. D. Pagani, S. Salsa – "Analisi Matematica, Vol. 1" – Zanichelli.
Esercizi: P. Marcelllini e C. Sbordone, "Esercitazioni di Matematica, vol. 1", parte prima e parte seconda, Liguori Editore.

Lettura consigliata: P. Odifreddi "Idee per diventare matematico" Zanichelli

Strumenti e Metodi didattici

Insegnamento tradizionale su lavagna, esercizi e laboratorio in collaborazione con gli studenti del corso.

Modalità d'esame: preliminare prova scritta (6 prove all'anno: 2 prove a gennaio, febbraio-giugno-luglio-settembre) con esercizi sui concetti fondamentali del corso, valutazione in trentesimi. Con 18/30 si ha il diritto di accedere alla successiva prova orale. La prova scritta consente di sostenere l'orale entro la sessione in corso ossia entro il 28 febbraio

per le prove scritte di gennaio e febbraio, entro il 30 settembre per le prove di giugno, luglio e settembre.
La prova orale alla lavagna è della durata di circa 45 min. con domande sulle parti principali del programma svolto. Un esito negativo della prova orale impone la ripetizione dell'intera procedura (scritto ed orale in serie). Il voto finale, espresso in trentesimi, è una media pesata tra il risultato della prova scritta e della prova orale.